Sensitivity Analysis تحليل الحساسية

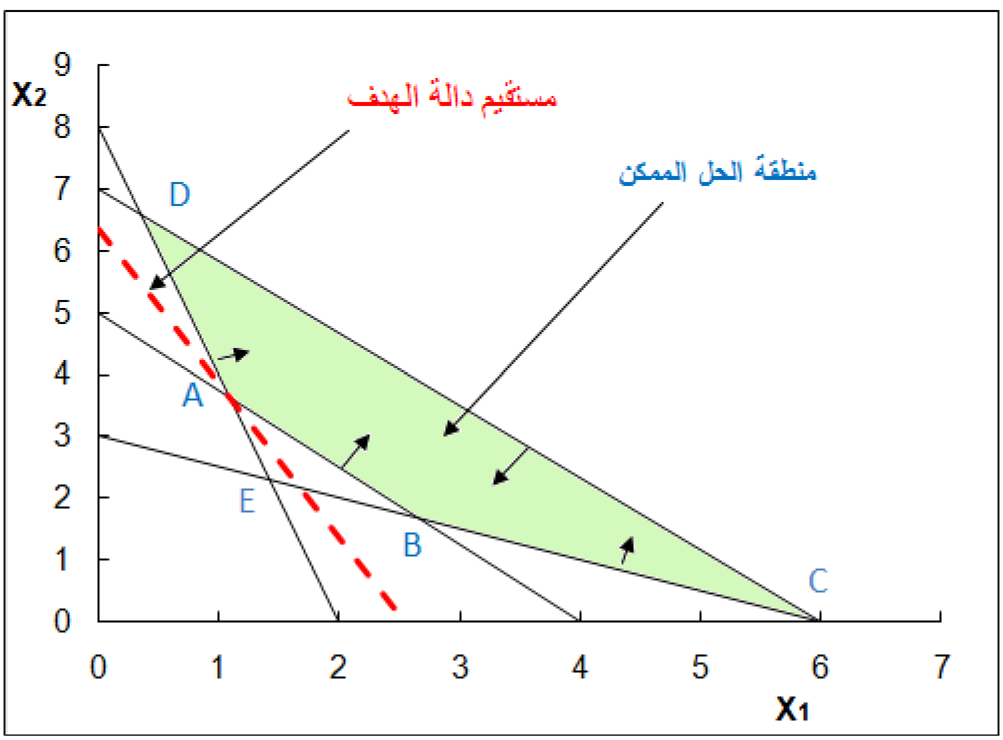
يدرس تحليل الحساسية أثر التغيرات في بعض عناصر البرنامج الخطي على الحل الأمثل الحالي. من ذلك مثلاً [Gould et al, 1991] معرفة أثر التغير في معاملات دالة الهدف أو معاملات المتغيرات في القيود أو أثر التغير في قيمة الجانب الأيمن للقيود أو أثر إضافة متغير جديد أو حذف متغير قديم على الحل الأمثل الحالي. و يمكن للدارس معرفة أثر هذه التغيرات باستخدام الرسم أو باستخدام السمبلكس أو باستخدام مخرجات بعض البرامج الحاسبية مثل LINDO, Win QSB, QM for Windows, Solver by Excel. و يعتبر تحليل الحساسية مهماً جداً لمتخذ القرار و ذلك لأنه يساعد على سرعة اتخاذ القرارات الإدارية.

لنأخذ المسألة التالية (5-1) لتوضيح ذلك:

Min $z = 5X_1 + 2X_2$

Subject to

$$3X_1 + 6X_2 \geq 18$$
$$5X_1 + 4X_2 \geq 20$$
$$8X_1 + 2X_2 \geq 16$$
$$7X_1 + 6X_2 \leq 42$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$



شكل 5-1

نلاحظ أن قيم الحل الأمثل لهذه المسألة هي ($Z=12.7272, X_1=1.0909, X_2=3.6363$) و ذلك عند النقطة A و التي تمثل تقاطع القيدين الثاني و الثالث (القيود النشطة). و لكن ماذا يحدث للحل الأمثل الحالي لو تغيرت بعض العناصر في البرنامج الخطي؟ تحليل الحساسية يساعد في الإجابة على مثل هذه الأسئلة. و المقصود بما يحدث للحل الأمثل الحالي أي ماذا يحدث للتالي:

- القيود النشطة: هل ستظل نشطة أم سيتغير واحد منها على الأقل و يصبح قيداً غير نشط.
- قيم المتغيرات: هل ستظل قيمها كما هي أم ستتغير (هل تتغير نقطة الحل الأمثل الحالي).
- قيمة دالة الهدف: هل ستظل كما هي أم ستتغير (إلى الأفضل أو إلى الأسوأ).

فإذا لم يتغير الحل الأمثل فإن هذا يعني:

- من المؤكد أن مجموعة القيود النشطة لم تتغير و بقيت نشطة مع إمكانية تحول أي قيد غير نشط إلى قيد نشط.
- من الممكن أن تتغير قيم المتغيرات و لكن المتغيرات الأساسية ستبقى أساسية و غير الأساسية ستبقى غير أساسية.
- من الممكن أن تتغير قيمة دالة الهدف أو تظل كما هي.

و إذا تغير الحل الأمثل فإن هذا يعني:

- من المؤكد أن مجموعة القيود النشطة قد تغيرت بمعنى أن واحداً أو أكثر من القيود النشطة قد تحول إلى قيدٍ غير نشط.
- من المؤكد أن تتغير قيم المتغيرات.
- غالباً ستتغير قيمة دالة الهدف و في حالات قليلة جداً لن تتغير. سنذكر مثالاً لهذه الحالات القليلة في نهاية هذا الباب.

وهذا التغير في الحل الأمثل يحدث إذا تغير عنصرٌ واحدٌ من عناصر البرنامج الخطي مع بقاء باقي العناصر الأخرى ثابتة و كذلك إذا تغير أكثر من عنصر في وقتٍ واحد [Winston, 2003]. و لجعل الأمر أكثر سهولة فنبدأ بدراسة أثر التغير لعنصرٍ واحدٍ فقط من عناصر البرنامج الخطي مع بقاء جميع العناصر الأخرى ثابتة.

الحالة الأولى: تحليل الحساسية عند تغير عنصرٍ واحدٍ من عناصر البرنامج الخطي مع بقاء باقي العناصر الأخرى ثابتة:

سنتحدث في هذا القسم عن 1) تحليل الحساسية باستخدام الرسم البياني ليتمكن القارئ من تصور ما يحدث ثم سننتقل إلى الحديث عن 2) تحليل الحساسية باستخدام مخرجات البرامج الحاسوبية للبرمجة الخطية و أخيراً عن 3). تحليل الحساسية باستخدام طريقة السمبلكس. يلاحظ تأخيرنا لموضوع تحليل الحساسية باستخدام طريقة السمبلكس و ذلك حتى يتسنى للقارئ معرفة بعض المصطلحات العلمية و الموجودة في مخرجات البرامج الحاسوبية قبل معرفة كيفية إيجادها باستخدام السمبلكس.

أولاً: تحليل الحساسية بيانياً:

أثر التغير في معامل أحد المتغيرات في دالة الهدف على الحل الأمثل:

أ. إذا كان التغير في معامل متغير أساسي ذا قيمة موجبة:

لو تغير معامل X_1 في دالة الهدف فإن هذا التغير قد يؤثر وقد لا يؤثر على الحل الأمثل الحالي و المعيار هنا هو معرفة المدى المسموح به لهذا المعامل بالتغير. فإذا تغير هذا المعامل بقيمة ضمن المدى المسموح به فإن الحل الأمثل الحالي سيبقى كما هو ولكن لو كان هذا التغير خارج المدى المسموح به فإن الحل الأمثل الحالي سيتغير. و لتحديد هذا المدى فلا بد أن نستخدم العلاقة بين معاملات المتغيرات في دالة الهدف و معاملات المتغيرات في القيود النشطة (القيد الثاني و القيد الثالث في المسألة 5−1) و الموضحة في العلاقة التالية:

$$\frac{\text{معامل } X_1 \text{ في دالة الهدف}}{\text{معامل } X_2 \text{ في دالة الهدف}} = \frac{\text{معامل } X_1 \text{ في القيد النشط } i}{\text{معامل } X_2 \text{ في القيد النشط } i}$$

فلو أردنا معرفة الحد الأدنى لمعامل X_1 الذي يُبقي الحل الأمثل الحالي كما هو أي تبقى القيود النشطة كما هي وقيم المتغيرات كما هي مع تغير قيمة دالة الهدف (Objective Value) فيجب أن نتعامل مع القيد الثاني

لأنه كلما انخفض معامل X_1 في دالة الهدف فإن ميل دالة الهدف يكون أقرب إلى مساواة ميل القيد الثاني و بالتالي فإن:

$$\frac{\text{معامل } X_1 \text{ في دالة الهدف}}{\text{معامل } X_2 \text{ في دالة الهدف}} = \frac{\text{معامل } X_1 \text{ في القيد النشط الثاني}}{\text{معامل } X_2 \text{ في القيد النشط الثاني}}$$

و بعد التعويض فإن،

$$\frac{\text{الحد الأدنى لمعامل } X_1 \text{ في دالة الهدف}}{2} = \frac{5}{4}$$

إذاً، الحد الأدنى لمعامل X_1 في دالة الهدف $= \frac{5 \times 2}{4} = 2.5$

و العكس بالنسبة لمعامل X_2 في دالة الهدف فكلما زاد كلما كان ميل دالة الهدف أقرب إلى مساواة ميل القيد الثاني و بالتالي فإن الحد الأعلى لمعامل X_2 في دالة الهدف:

$$\frac{5}{\text{الحد الأعلى لمعامل } X_2 \text{ في دالة الهدف}} = \frac{5}{4}$$

إذاً، الحد الأعلى لمعامل X_2 في دالة الهدف $= \frac{5 \times 4}{5} = 4$

و بنفس الطريقة يمكن أن تكون العلاقة بين معاملات دالة الهدف و معاملات القيد النشط الثالث، فلو أردنا معرفة الحد الأعلى لمعامل X_1 الذي يبقي الحل الأمثل كما هو أي تبقى القيود النشطة كما هي وقيم المتغيرات كما هي مع تغير قيمة دالة الهدف فيجب أن نتعامل مع القيد الثالث لأنه كلما زاد معامل X_1 في دالة الهدف فإن ميل دالة الهدف يكون أقرب إلى مساواة ميل القيد الثالث و بالتالي فإن:

$$\frac{\text{معامل } X_1 \text{ في دالة الهدف}}{\text{معامل } X_2 \text{ في دالة الهدف}} = \frac{\text{معامل } X_1 \text{ في القيد النشط الثالث}}{\text{معامل } X_2 \text{ في القيد النشط الثالث}}$$

و بعد التعويض فإن،

$$\frac{\text{الحد الأعلى لمعامل } X_1 \text{ في دالة الهدف}}{2} = \frac{8}{2}$$

إذاً، الحد الأعلى لمعامل X_1 في دالة الهدف $= \frac{8 \times 2}{2} = 8$

و العكس بالنسبة لمعامل X_2 في دالة الهدف فكلما انخفض كلما كان ميل دالة الهدف أقرب إلى مساواة ميل القيد الثالث و بالتالي فإن:

$$\frac{8}{2} = \frac{5}{\text{الحد الأدنى لمعامل } X_2 \text{ في دالة الهدف}}$$

إذاً، الحد الأدنى لمعامل X_2 في دالة الهدف $= \dfrac{2 \times 5}{8} = 1.25$

و كخلاصة، فإن الزيادة المسموح بها و النقصان المسموح به لمعامل المتغير في دالة الهدف هي القيمة المطلقة للفرق بين القيمة الحالية لمعامل المتغير في دالة الهدف و الحد الأعلى أو الحد الأدنى لهذا المعامل كما يلي:

النقصان المسموح به Allowable Decrease	الزيادة المسموح بها Allowable Increase	المعامل الحالي Current Coefficient	المتغير Variable
2.5	3	5	X_1
0.75	2	2	X_2

هذا يعني إذا زاد معامل X_1 مثلاً بقيمة 2 (وهي زيادة ضمن الزيادة المسموح بها) و أصبح 7 فإن:

1. **الحل الأمثل لن يتغير و ذلك يعني أن القيد الثاني و القيد الثالث سيبقيان نشطين،**
2. **قيم المتغيرات لن تتغير أي أن $X_1=1.0909, X_2=3.6363$ ،**
3. **أما قيمة دالة الهدف Z فإنها ستتغير و تصبح كالتالي:**

$$\text{New Z-value} = \text{Old Z-value} + (\Delta c_1 \times X_1)$$

تذكر دائماً أن عبارة الحل الأمثل الحالي يتغير أو لا يتغير مرتبط بالقيود النشطة فإذا تغير الحل الأمثل الحالي فإن هذا يعني أن القيود النشطة تغيرت وإذا لم يتغير الحل الأمثل الحالي فإن القيود النشطة لم تتغير.

قاعدة 5-1:

$$\text{New Z-value} = \text{Old z-value} + (\Delta C_j \times X_j)$$

حيث،

New Z-value : قيمة دالة الهدف الجديدة

Old Z-value : قيمة دالة الهدف القديمة

Δc_j : مقدار التغير في معامل X_j في دالة الهدف و تكون قيمته موجبة في حالة الزيادة و سالبة في حالة النقصان

إذاً: $$\text{New Z-value} = 12.7272 + (\, 2 \times 1.0909\,) = 14.909$$

أو يمكن حسابها كالتالي :

قاعدة 5-2:

$$\text{New z-value} = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j = C_1X_1 + C_2X_2 + \ldots\ldots + C_nX_n$$

حيث، c_j: معامل المتغير X_j في دالة الهدف

إذاً: $$\text{New Z-value} = (7)\,(1.0909) + (2)\,(3.6363) = 14.909$$

أما لو كان التغير في معامل دالة الهدف خارج نطاق المدى المسموح به فإن ذلك يعني أن أحد القيدين النشطين على الأقل سيتحول إلى قيد غير نشط و بالتالي فإن الحل الأمثل سيتغير أي أن مجموعة أو تشكيلة القيود النشطة ستتغير بالتالي تتغير قيم المتغيرات و قيمة دالة الهدف. و كمثال على ذلك لنفرض أن معامل X_1 في دالة الهدف نقص بمقدار 3 وحدات و أصبح 2 بدلاً من 5. حيث أن هذا النقصان خارج نطاق مدى النقصان المسموح به و بالعودة إلى الحل البياني نجد أن نقطة الحل الجديدة هي B و فيها يكون القيد الأول و القيد الثاني نشطين أما القيد الثالث فأصبح قيدٌ غير نشط. و عند هذه النقطة فإن قيمة المتغيرات و قيمة دالة الهدف تساويان:

$$(\,Z=8.67,\ X_1=2.67,\ X_2=1.67)$$

و هنا يُلاحظ الانخفاض في قيمة دالة الهدف عن السابق و الناتج من انخفاض معامل X_1 في دالة الهدف.

قاعدة 5-3:

إذا تغير معامل أحد المتغيرات الأساسية (و الذي قيمته موجبة عند الحل الأمثل) في دالة الهدف ضمن المدى المسموح به مع بقاء جميع العناصر الأخرى ثابتة فإن:

1. الحل الأمثل الحالي لن يتغير أي أن القيود النشطة ستظل نشطة.
2. لن تتغير قيم المتغيرات.
3. ستتغير قيمة دالة الهدف.

أما إذا كان التغير في معاملات دالة الهدف خارج نطاق المدى المسموح به فإن الحل الأمثل سـيتغير وبالتـالي ستتغير قيم المتغيرات و قيمة دالة الهدف و لن يكون من السهل معرفة هذا التغير إلا بإعادة حل المسألة مـن جديد باستثناء إذا كان عدد المتغيرات اثنين.

كما يمكن اختصار الطريقة السابقة بالتالي:

معادلة دالة الهدف تساوي:

$$X_2 = \frac{Z}{2} - \frac{5X_1}{2}$$

وبالتالي فإن ميل مستقيم دالة الهدف = $-\frac{5}{2}$

و الذي يعني أنه كلما زادت قيمة X_1 بوحدة واحدة تنخفض قيمة X_2 بمقدار 2.5 وحدة.

فإذا تغير معامل X_1 بالنقصان فإن مستقيم دالة الهدف سيصبح أكثر أفقية وسيميل إلى موازاة القيد الثاني فإذا نقص عن ذلك فسيتغير الحل الأمثل و يمكن معرفة ذلك بمقارنة ميل دالة الهدف بمجهولية معامل X_1 و ميل القيد الثاني كالتالي:

$$-\frac{C_1}{2} \leq -\frac{5}{4} \Rightarrow C_1 \geq 2.5$$

أما إذا تغير معامل X_1 بالزيادة فإن مستقيم دالة الهدف سيصبح أكثر عمودية وسيميل إلى موازاة القيد الثالث فإذا زاد عن ذلك فسيتغير الحل الأمثل و يمكن معرفة ذلك بمقارنة ميل دالة الهدف بمجهولية معامل X_1 و ميل القيد الثالث كالتالي:

$$-\frac{C_1}{2} \geq -\frac{8}{2} \Rightarrow C_1 \leq 8$$

ويمكن استخدام نفس الطريقة بالنسبة لمعامل X_2.

ملاحظة: أنظر الملحق في نهاية الباب لإيجاد المدى المسموح به لمعاملات المتغيرات في دالـة الهـدف عنـد اختلاف إشارة المعاملات.

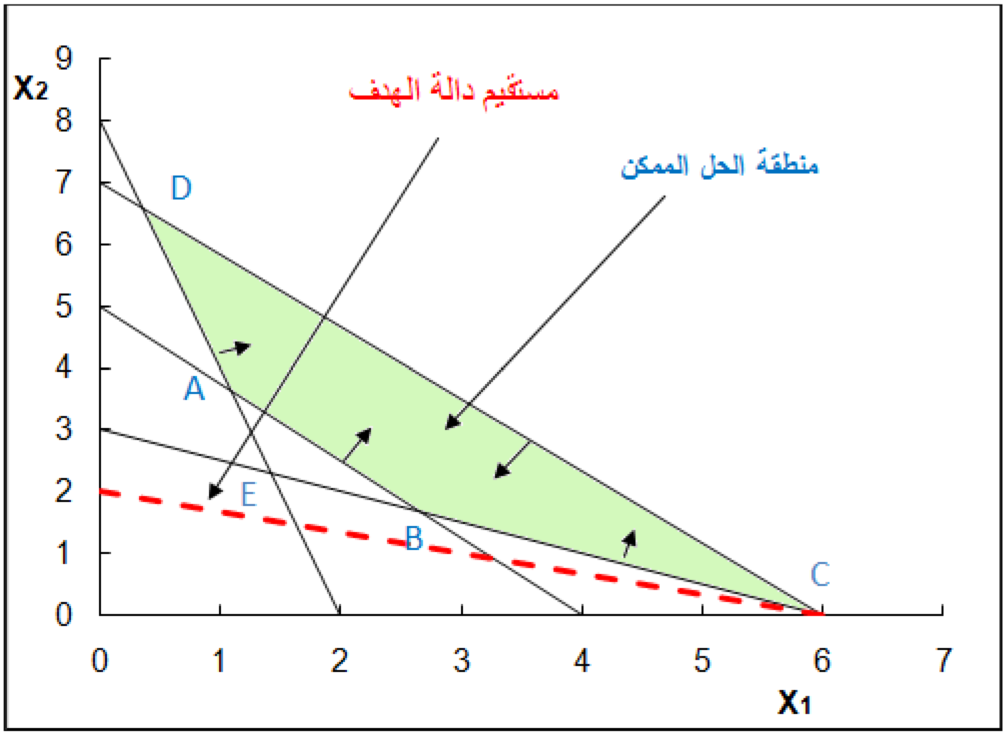
ب. إذا كان التغير في معامل متغير أساسي قيمته تساوي الصفر أو متغير غير أساسي:

تحدثنا عن التغير في أحد المتغيرات في دالة الهدف بمعلومية أن هذا المتغير ذا قيمة موجبة. لكن ماذا لو كان هذا المتغير غير أساسي أو أساسياً قيمته تساوي صفراً عند نقطة الحل الأمثل. ما هو مدى التغير في معامل هذا المتغير في دالة الهدف بحيث لا يتغير الحل الأمثل الحالي؟ للاجابة على هذا السؤال سنأخذ المسألة التالية (5−2) و هي نفس مسألة (5−1) مع إحداث تغيير واحد فقط في دالة الهدف:

Min z = $2X_1 + 6X_2$

Subject to

$$3X_1 + 6X_2 \geq 18$$
$$5X_1 + 4X_2 \geq 20$$
$$8X_1 + 2X_2 \geq 16$$
$$7X_1 + 6X_2 \leq 42$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$



شكل 5-1 المعدل

من الشكل 5-1 المعدل، <u>نلاحظ</u> أن نقطة الحل الأمثل تقع عند النقطة C، و عندها قيمة $(X_1=6, X_2=0, Z=12)$. و حيث أن قيمة المتغير $X_2=0$ (متغير غير أساسي قيمته تساوي الصفر)، فإن المدى المسموح به لمعامل هذا المتغير سيكون كالتالي:

<u>**المدى المسموح به لمعامل المتغير X_2 في دالة الهدف (قيمته تساوي الصفر عند الحل الأمثل):**</u>

<u>الزيادة المسموح بها:</u> إذا زاد معامل X_2 في دالة الهدف فإن مستقيم دالة الهدف سيتحرك بعكس اتجاه عقارب الساعة متجهاً إلى أن يكون أفقياً. و بالتالي فإن هذه الزيادة لن تغير الحل الأمثل مهما كانت قيمتها و هنا نستطيع أن نقرر أن الزيادة المسموح بها لمعامل X_2 في دالة الهدف تساوي مالا نهاية. لاحظ أن هذه الزيادة تتوافق مع المنطق حيث أننا حالياً وجدنا بناءً على الحل الأمثل الحالي عدم الإنتاج من X_2 لأن قيمة معاملها (التكلفة) كبيرة و نحن في حالة Min فهل من المنطق أن ننتج منها إذا زادت هذه التكلفة؟ الجواب (لا)، و بالتالي فمهما زادت هذه التكلفة فسنبقى على وضعنا الحالي بعدم الإنتاج من X_2 و الإنتاج فقط من X_1.

النقصان المسموح به: إذا نقص معامل X_2 في دالة الهدف فإن مستقيم دالة الهدف سيتحرك باتجاه عقارب الساعة حتى يوازي مستقيم القيد الأول (ميل دالة الهدف يساوي ميل القيد الأول) و عند موازاته للقيد الأول سيظهر لنا حل بديل و هو عند النقطة B. فإذا نقص أكثر فإن الحل الأمثل سيتحول إلى النقطة B و عندها سيتغير الحل الأمثل. إذاً النقصان المسموح به لمعامل X_2 في دالة الهدف هو النقصان الذي يجعل مستقيم دالة الهدف يوازي مستقيم القيد الأول أي أن ميل مستقيم دالة الهدف يساوي ميل مستقيم القيد الأول. لإيجاد قيمة هذا النقصان المسموح به:

$$\frac{\text{معامل } X_1 \text{ في دالة الهدف}}{\text{معامل } X_2 \text{ في دالة الهدف}} = \frac{\text{معامل } X_1 \text{ في القيد النشط الأول}}{\text{معامل } X_2 \text{ في القيد النشط الأول}}$$

و بعد التعويض فإن،

$$\frac{2}{\text{الحد الأدنى لمعامل } X_2 \text{ في دالة الهدف}} = \frac{3}{6}$$

إذاً، الحد الأدنى لمعامل X_2 في دالة الهدف $= \frac{6 \times 2}{3} = 4$

بالنسبة لمعامل X_1 في دالة الهدف(قيمته موجبة عند الحل الأمثل):

الزيادة المسموح بها: إذا زاد معامل X_1 في دالة الهدف فإن مستقيم دالة الهدف سيتحرك باتجاه عقارب الساعة حتى يوازي القيد الأول و عند موازاته للقيد الأول سيظهر لنا حل بديل و هو عند النقطة B. فإذا زاد أكثر فإن الحل الأمثل سيتحول إلى النقطة B و عندها سيتغير الحل الأمثل. إذاً الزيادة المسموح بها لمعامل X_1 في دالة الهدف هو الزيادة التي تجعل مستقيم دالة الهدف يوازي مستقيم القيد الأول أي أن ميل مستقيم دالة الهدف يساوي ميل مستقيم القيد الأول. لإيجاد قيمة هذه الزيادة المسموح بها:

$$\frac{\text{الحد الأعلى لمعامل } X_1 \text{ في دالة الهدف}}{6} = \frac{3}{6}$$

إذاً، الحد الأعلى لمعامل X_1 في دالة الهدف $= \frac{6 \times 3}{6} = 3$

النقصان المسموح به: إذا نقص معامل X_1 في دالة الهدف فإن مستقيم دالة الهدف سيتحرك بعكس اتجاه عقارب الساعة متجهاً إلى أن يكون أفقياً. و بالتالي فإن هذه النقصان لن يغير الحل الأمثل مهما كانت قيمته و هنا نستطيع أن نقرر أن النقصان المسموح به لمعامل X_1 في دالة الهدف تساوي مالا نهاية. لاحظ أن هذا النقصان يتوافق مع المنطق حيث أننا حالياً وجدنا بناءً على الحل الأمثل الحالي الإنتاج من X_1 لأن قيمة معاملها (التكلفة) صغيرة و نحن في حالة Min فهل من المنطق أن لا ننتج منها إذا نقصت هذه التكلفة؟ الجواب (لا)، و بالتالي فكلما نقصت هذه التكلفة فسنبقى على وضعنا الحالي بعدم الإنتاج من X_2 و الإنتاج فقط من X_1.

لاحظ حالة التحلل عند النقطة C، حيث تتقاطع ثلاثة قيود أحدها قيد عدم السلبية و لدينا متغيران للقرار فقط. هنا S_1, S_4, X_2 كلها تساوي الصفر و المتغيرات الأساسية الموجبة هي S_2, S_3, X_1 و عددها أقل من عدد القيود (عدد القيود أربعة). المتغير S_4 متغير أساسي لكن قيمته تساوي صفراً (أنظر مشكلة حالة التحلل في تحليل الحساسية في الملحق لهذا الباب).

أثر التغير في قيمة الجانب الأيمن لأحد القيود على الحل الأمثل:

أولاً: أثر التغير في قيمة الجانب الأيمن لأحد القيود النشطة على الحل الأمثل:

إذا تغير الجانب الأيمن لأي قيد سواء كان نشطاً أو غير نشطٍ فإنه سيُحدث تحركاً في القيد بشكل موازٍ للقيد قبل التغيير. هذا يعني أنه في حالة القيد النشط فإن هذا التحرك سيغير من قيم المتغيرات و بالتالي التغير في قيمة دالة الهدف و لكن هل يعني هذا التغير التغير في الحل الأمثل الحالي؟ بمعنى هل يعني هذا أن القيود النشطة (و هي القيود التي يُكوّن تقاطعها نقطة الحل الأمثل) سوف تتغير؟ للإجابة على هذا السؤال يجب معرفة ما إذا كان التغير في الجانب الأيمن للقيد النشط ضمن المدى المسموح به.

لنأخذ المسألة (5-1) و الشكل 5-1 كتطبيق للتأثير الناتج من التغير في الجانب الأيمن. حيث أن القيد الثاني قيد نشط فما هو مقدار الزيادة في الجانب الأيمن للقيد الثاني و التي تُبقي القيدين الثاني و الثالث نشطين؟

إن الزيادة في الجانب الأيمن للقيد الثاني سوف تُحرك الخط المستقيم و الذي يمثل القيد الثاني إلى الأعلى (اليمين) بشكل موازٍ للقيد قبل التغيير و ذلك لأن الزيادة حدثت في الجزء الثابت من القيد و هو الجانب الأيمن (لاحظ أن التحرك إلى الأعلى ناتج من كون معاملات المتغيرات في القيد الثاني جميعها موجبة و الجانب الأيمن موجب. تحقق من ذلك). فإذا تحرك هذا القيد إلى الأعلى فإن منطقة الحل الممكن سوف تصغر في مثالنا هذا و ذلك لأن اتجاه القيد أكبر من أو يساوي. هذه الحركة سوف تُغير نقطة الحل الأمثل تدريجياً حسب قيمة الزيادة

إلى أن تتحول نقطة الحل الأمثل إلى النقطة D و هي آخر نقطة في منطقة الحل الممكن يلتقي فيها القيدان الثاني و الثالث. أما اذا كان الأثر الناتج من الزيادة في الجانب الأيمن سيؤدي إلى تجاوز النقطة D فإن القيد الثالث سيتحول إلى قيدٍ غير نشط. (ملاحظة: إذا تجاوز أثر الزيادة في الجانب الأيمن للقيد الثاني النقطة C فإن المسألة في هذه الحالة تصبح غير ممكنة الحل Infeasible). إذاً الزيادة المسموح بها للجانب الأيمن في القيد الثاني هي الزيادة التي تجعل نقطة الحل الأمثل تتحول إلى النقطة D كما في الشكل 2.5 و الشكل 5.5. و لحساب هذه الزيادة نقوم بالتالي:

عند النقطة D: $X_1 = 0.3529, X2 = 6.5882$

و بالتعويض في القيد الثاني:

$$5\,(0.3529) + 4\,(6.5882) = 28.1176$$

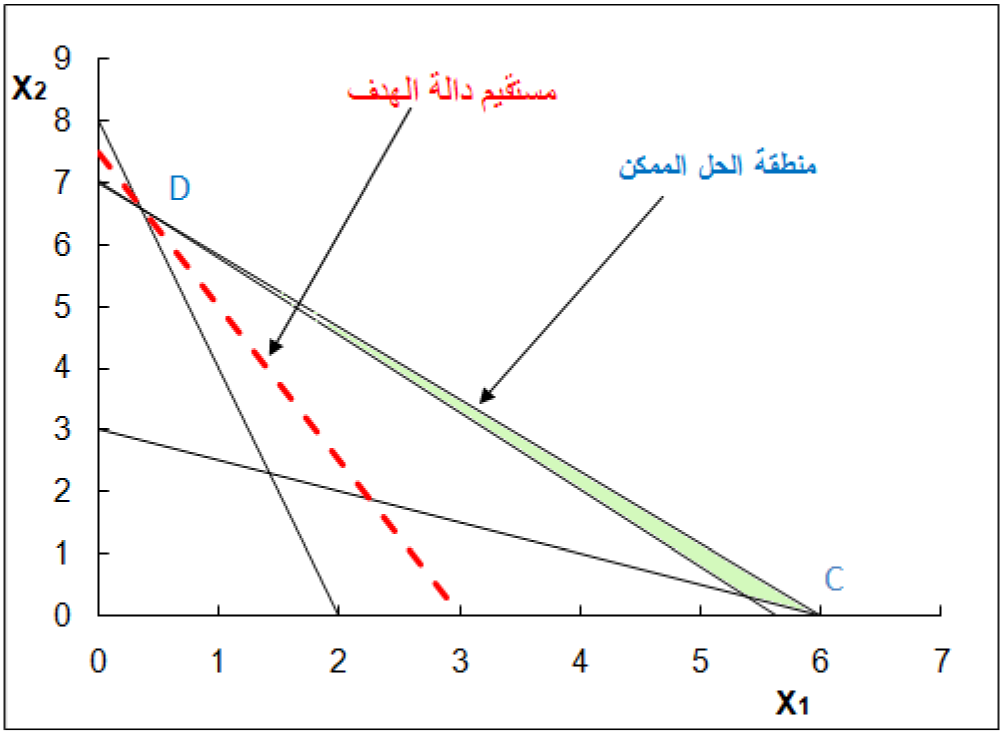
إذاً الزيادة المسموح بها للجانب الأيمن في القيد الثاني هي:

$$28.1176 - 20 = 8.1176$$

فإذا زاد الجانب الأيمن للقيد الثاني زيادة أقل من أو تساوي 8.1176 (الزيادة المسموح فيها) فإن القيد الثاني و الثالث سيبقيان نشطين. (لاحظ أنه عندما تكون الزيادة تساوي 8.1176 فإن هناك قيداً أخر يصبح نشطاً و هو القيد الرابع و بالتالي يكون لدينا حالة تحلل. لماذا؟) هنا يمكن لنا أن نتصور لماذا إذا زاد الجانب الأيمن في القيد الثاني تتغير قيمة المتغيرات. أما دالة الهدف فتتغير قيمتها و تصبح:

$$\text{New Z-value} = c_1 X_1 + c_2 X_2 = 5\,(0.3529) + 2\,(6.5882) = 14.9411$$

أي أن الزيادة في الجانب الأيمن للقيد الثاني جعلت قيمة دالة الهدف أسوأ من السابق و ذلك لأن هذه الزيادة أدت إلى تصغير منطقة الحل الممكن بسبب أن اتجاه القيد الثاني أكبر من أو يساوي كما أوضحنا سابقاً و هذا خاصٌ بمثالنا هذا.



شكل 5–2

و الآن لننظر إلى الأثر الآخر للتغير و هو النقصان في قيمة الجانب الأيمن لهذا القيد النشط (الثاني). ما هو مقدار النقصان في الجانب الأيمن للقيد الثاني و الذي يُبقيه نشطاً مع القيد الثالث؟ إذا نقصت قيمة الجانب الأيمن للقيد الثاني فإن الخط المستقيم و الذي يمثل هذا القيد سوف يتحرك إلى الأسفل (اليسار) بشكل موازٍ للقيد قبل التغيير في قيمة الجانب الأيمن. هذا التحرك إلى الأسفل سيُبقي القيدين الثاني و الثالث نشطين حتى النقطة E كما في الشكل 5–3 و بعدها سيتحول القيد الثاني إلى قيد غير نشط و يصبح القيدُ الأولُ نشطاً بدلاً عنه و ذلك لأن القيد الثاني سيكون خارج منطقة الحل الممكن و يتحول إلى قيد مكرر. (تحقق من ذلك.)

عند النقطة E: $X_1 = 1.4285, X2 = 2.2857$

و بالتعويض في القيد الثاني:

$$5\,(1.4285) + 4\,(2.2857) = 16.285714$$

إذاً النُقصان المسموح به للجانب الأيمن في القيد الثاني هو:

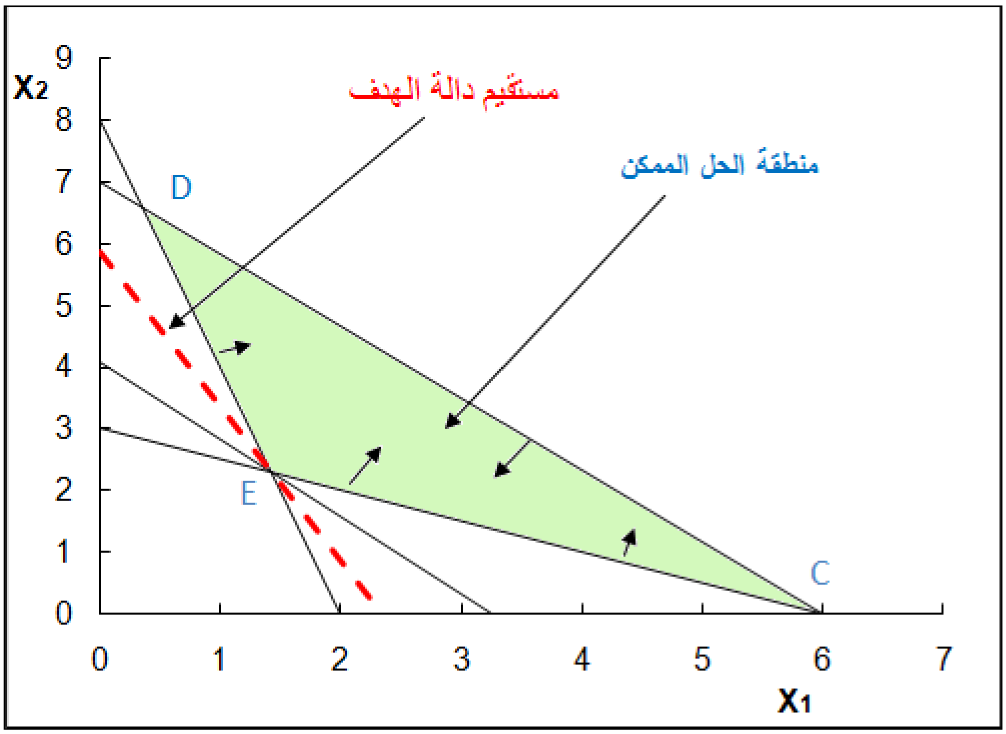
$$20 - 16.285714 = 3.714286$$

(لاحظ عند النقطة E يكون لدينا حالة تحلل، لماذا؟)

أما قيمة دالة الهدف فتصبح:

$$\text{New Z-value} = c_1 X_1 + c_2 X_2 = 5\,(1.4285) + 2\,(2.2857) = 11.7142$$

نلاحظ هنا انخفاض في قيمة دالة الهدف (تحسن) و ذلك لأن منطقة الحل الممكن أصبحت أكبر و لكن باتجاه اليسار. لماذا؟ أنظر الاختلاف بين الشكل 5-1 و الشكل 5-3



شكل 5-3

قاعدة 5-4: إذا كان التغير في قيمة الجانب الأيمن للقيد النشط ضمن نطاق المدى المسموح به فإن:

1. الحل الأمثل الحالي يبقى كما هو أي أن القيود النشطة لن تتغير.
2. قيم المتغيرات ستتغير.
3. قيمة دالة الهدف ستتغير.

أما إذا كانت الزيادة خارج نطاق المدى المسموح به فإنه من الممكن معرفة الأثر الناتج إذا كانت المسألة تحتوي على متغيرين فقط و ذلك باستخدام الحل البياني و لكنها تصبح غير ممكنة إذا كان عدد المتغيرات أكثر من اثنين إلا بإعادة حل المسألة من جديد.

لكن يبقى السؤال ماهي قيمة المتغيرات و قيمة دالة الهدف إذا كان التغير في الجانب الأيمن للقيد النشط أقل من أو يساوي المدى المسموح به؟ و للاجابة على هذا السؤال لنفرض أن الجانب الأيمن للقيد الثاني زاد بقيمة Δ (حيث Δ هي قيمة أقل من أو تساوي الزيادة المسموح بها) فما هي قيم المتغيرات و قيمة دالة الهدف؟ حيث أن الزيادة ضمن المدى المسموح به فإن القيدين النشطين يصبحان:

$$5X_1 + 4X_2 \geq 20 + \Delta$$
$$8X_1 + 2X_2 \geq 16$$

و بحل المتراجحتين بعد تحويلهما إلى معادلتين نحصل على:

$$X_1 = \frac{12-\Delta}{11}$$

$$X_2 = 8 - \frac{48-4\Delta}{11}$$

و قيمة دالة الهدف كالتالي:

$$\text{New Z-value} = 5\frac{(12-\Delta)}{11} + 2\frac{(40+4\Delta)}{11}$$

فلو كانت قيمة Δ تساوي 2 و ضمن الزيادة المسموح بها فما هي قيم المتغيرات و قيمة دالة الهدف؟ بالتعويض فإن قيمة $X_1 = 0.9090$ و $X_2 = 4.3636$ و قيمة دالة الهدف $Z= 13.2727$.

ثانياً: أثر التغير في قيمة الجانب الأيمن لأحد القيود غير النشطة على الحل الأمثل:

إذا تغيرت قيمة الجانب الأيمن لأحد القيود غير النشطة فإن ذلك سيُحدث تحركاً للخط المستقيم الممثل للقيد غير النشط بشكل موازٍ للقيد قبل التغيير و لكن أثر هذا التحرك سيكون في أحد الاتجاهين و ليس في كليهما. هذا يعني أنه إذا تحرك الخط المستقيم للقيد لتغير قيمة جانبه الأيمن في أحد الاتجاهات فإنه سيبتعد عن نقطة الحل الأمثل و بالتالي فلن يكون له أي تأثير على الحل الأمثل مهما كانت قيمة هذا التغير حتى لو كانت مالا نهاية.

أما إذا تحرك للجانب الآخر فإنه سيكون له أثر على نقطة الحل الأمثل بعد التغير في قيمة جانبه الأيمن بمقدار معين.

كمثال على ذلك لنأخذ القيد الرابع للمسألة (5−1) و كما في الشكل 5−1. نلاحظ أن هذا القيد غير نشط لأنه لا يُقاطع نقطة الحل الأمثل A، وعندما نزيد الجانب الأيمن لهذا القيد فإنه سيتحرك إلى أعلى (اليمين) وسيبتعد عن نقطة الحل الأمثل A و بالتالي فالزيادة المسموح بها هنا هي مالا نهاية مما يعني أنه لا أثر لهذه الزيادة على الحل الأمثل الحالي إلا من ناحية أن منطقة الحل الممكن تكون أكبر. أما إذا نقص الجانب الأيمن فإنه سيقترب من نقطة الحل الأمثل A و عندها يتحول إلى قيد نشط. و لحساب قيمة هذا النقصان نعوض في الجانب الأيسر للقيد الرابع بقيم المتغيرات عند النقطة A بالشكل التالي:

$$7\,(1.0909) + 6\,(3.6363) = 29.4545$$

إذاً النقصان المسوح به يحسب بطرح القيمة السابقة من قيمة الجانب الأيمن الحقيقية كالتالي:

$$42 - 29.4545 = 12.5454$$

ثانياً: تحليل الحساسية و البرامج الحاسبية:

تقدم البرامج الحاسبية مثل LINDO مخرجات تحليل الحساسية عند حل أي برنامج خطي وذلك لتسهيل قراءة و تحليل البيانات للمستخدمين. وتظهر النتائج كما في الشكل التالي 5-4:

```
Min 5X1 + 2X2
Subject to
3X1 + 6X2 >= 18
5X1 + 4X2 >= 20
8X1 + 2X2 >= 16
7X1 + 6X2 <= 42
LP OPTIMUM FOUND AT STEP      3
       OBJECTIVE FUNCTION VALUE
           1)        12.72727
  VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
       X1             1.090909        0.000000
       X2             3.636364        0.000000
      ROW   SLACK OR SURPLUS    DUAL PRICES
       2)               7.090909              0.000000
       3)               0.000000             -0.272727
       4)               0.000000             -0.454545
       5)              12.545455              0.000000
 NO. ITERATIONS=       3
 RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:
                         OBJ COEFFICIENT RANGES
 VARIABLE         CURRENT      ALLOWABLE        ALLOWABLE
                    COEF          INCREASE           DECREASE
      X1             5.000000        3.000000            2.500000
      X2             2.000000        2.000000            0.750000
                         RIGHTHAND SIDE RANGES
     ROW        CURRENT       ALLOWABLE        ALLOWABLE
                    RHS            INCREASE          DECREASE
        2          18.000000          7.090909          INFINITY
        3          20.000000          8.117647          3.714286
        4          16.000000          8.666667          6.000000
        5          42.000000          INFINITY         12.545455
```

شكل 5-4

و يمكن تفسير هذه المخرجات كالتالي:

قيمة دالة الهدف Objective Function Value : **و هي قيمة دالة الهدف للصيغة الرياضية كما في الشكل 5-4. و هذه القيمة 12.7272 تظهر كقيمة للصف الأول حيث أن برنامج LINDO يتعامل مع دالة الهدف على اعتبار أنها الصف الأول في المصفوفة و القيد الأول على أنه الصف الثاني و هكذا.**

قيم متغيرات القرار Decision Variables Value : **و هي قيم المتغيرات X_1 و X_2 كما في الشكل 5-4.**

المكمل أو الفائض Slack or Surplus : وتمثل قيم المتغيرات المكملة لكل قيد و يلاحظ هنا أن قيمة المتغيرات المكملة S_1 للقيد الأول (الصف الثاني) هي قيمة موجبة و ذلك لأن هذا القيد قيد غير نشط . أما في حالة القيد الثاني (الصف الثالث) فإن قيمة المتغير المكمل S_2 تساوي صفراً و ذلك لأنه قيد نشط (كما أوضحنا سابقاً).

المدى الذي لا يتغير فيه الأساس RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED : هو المدى الذي يمكن لقيم معاملات دالة الهدف أو قيم الجانب الأيمن في القيود أن تتغير دون أن يؤثر ذلك على الحل الأمثل أي دون أن تتغير القيود النشطة.

مدى معاملات دالة الهدف Objective Coefficient Ranges : هو المدى الذي يمكن فيه لمعاملات دالة الهدف أن تتغير دون أن تؤثر على الحل الأمثل الحالي و هذا المدى يتمثل في الزيادة المسموح بها **Allowable Increase** و النقصان المسموح به **Allowable Decrease**. فإذا كانت الزيادة أو النقصان ضمن المدى المسموح به فإن القيود النشطة و كذلك قيم المتغيرات لن يتغيران و لكن قيمة دالة الهدف ستتغير.
كمثال على ذلك و في شكل 5-4 لنفرض أن معامل X_1 انخفض بقيمة وحدة واحدة (ريال واحد) فما الذي سيحدث للحل الأمثل؟ بما أن النقصان ضمن المدى المسموح به (المدى المسموح به = 2.5) فإن:

1. القيود النشطة لن تتغير (سيظل الحل الأمثل الحالي كما هو)،
2. قيم المتغيرات لن تتغير و ستبقى A هي نقطة الحل الأمثل،
3. لكن ستتغير قيمة دالة الهدف و تصبح كالتالي:

$$\text{New Z-value} = \text{Old Z-value} + (\Delta c_1 \times X_1) = 12.72727 + (-1 \times 1.0909) = 11.63636$$

أما لو كانت الزيادة أو النقصان خارج نطاق المدى المسموح به فإن المسألة يجب أن تُحل من جديد، و إن كان من الممكن معرفتها في حالتنا هذه لأن عدد المتغيرات يساوي اثنين.

السعر الثنائي Dual Price: و يُسمى أيضاً سعر الظل **Shadow Price** أو الربح الحدي و هو القيمة (عندما تكون موجبة) التي تتحسن فيها قيمة دالة الهدف إذا زادت قيمة الجانب الأيمن للقيد النشط (i) بوحدة واحدة بشرط أن التغير في الجانب الأيمن لا يغير الحل الأمثل الحالي (أي أنه ضمن المدى المسموح به) بمعنى أن القيود النشطة تبقى نشطة و العكس إذا كان السعر الثنائي قيمة سالبة.

قاعدة 5-5: إذا كان القيد نشطاً فإن السعر الثنائي يكون: - سالباً إذا كان اتجاه القيد أكبر من أو يساوي. - موجباً إذا كان اتجاه القيد أصغر من أو يساوي.

– سالباً، موجباً، أو صفراً إذا كان القيد معادلة.

مدى الجانب الأيمن Right-Hand Side Ranges : هو المدى الذي يمكن فيه لقيم الجانب الأيمن للقيود بالتغير دون أن يؤثر ذلك على الحل الأمثل الحالي و هذا المدى يتمثل في الزيادة المسموح بها **Allowable Increase** و النقصان المسموح به **Allowable Decrease**. فإذا كانت الزيادة أو النقصان ضمن المدى المسموح به لقيدٍ نشطٍ فإن قيم المتغيرات و قيمة دالة الهدف ستتغيران و لكن القيود النشطة لن تتغير. و كمثال على ذلك و في شكل 5–4 لنفرض أن قيمة الجانب الأيمن للقيد الثاني (النشط) زادت بوحدة واحدة فما الذي سيحدث للحل الأمثل؟ بما أن الزيادة ضمن المدى المسموح به لقيدٍ نشطٍ (الزيادة المسموح بها = 8.1176) فإن:

1. القيود النشطة لن تتغير (سيظل الحل الأمثل الحالي كما هو)
2. قيم المتغيرات ستتغير و يمكن ايجادها بحل معادلتي القيدين النشطين (كما بينّا سابقاً) كالتالي:

$$5X_1 + 4X_2 = 21 \qquad (1)$$

$$8X_1 + 2X_2 = 16 \qquad (2)$$

وبضرب المعادلة رقم 2 في (2) نحصل على:

$$16X_1 + 4X_2 = 32 \qquad (3)$$

و بطرح 3 من 1 و حل المعادلتين نحصل على التالي:

$X_1 = 1$ و $X_2 = 4$

3. قيمة دالة الهدف ستتغير و تصبح $Z = 5 \times 1 + 2 \times 4 = 13$.

كما يمكن حساب قيمة دالة الهدف مباشرة من مخرجات برنامج **LINDO** و ذلك باستخدام السعر الثنائي **Dual Price**. و يتم حساب قيمة دالة الهدف كالتالي:

قاعدة 5–6:

1. **Minimization Case:**
   New Z-value = Old Z-value – ($\Delta RHS_{(i)} \times$ Dual Price$_{(i)}$)
2. **Maximization Case:**
   New Z-value = Old Z-value + ($\Delta RHS_{(i)} \times$ Dual Price$_{(i)}$)

فإذا زاد الجانب الأيمن للقيد الثالني بوحدة واحدة، فإن قيمة دالة الهدف الجديدة تساوي (**Min Case**):

$$\text{New Z-value} = 12.72727 - ((+1) \times -0.2727) = 13$$

أما لو زاد الجانب الأيمن للقيد الثاني بقيمة الزيادة المسموح بها فإننا نحصل على حالة التحلل **Degenerate Case** و الشكلان 5–2 و 5–5 يوضحان هذه الحالة (أنظر مشكلة حالة التحلل في تحليل الحساسية في

الملحق لهذا الباب) حيث أن القيد الرابع أصبح نشطاً بدليل أن قيمة المتغير المكمل لهذا القيد تساوي الصفر لكن لاحظ أن قيمة السعر الثنائي لهذا القيد ما زالت صفراً و ذلك لأنه أصبح قيداً نشطاً و نحن في حالة التحلل. و لو زادت قيمة الجانب الأيمن للقيد الثاني بقيمة أكبر من الزيادة المسموح بها و لو بقيمة صغيرة لخرجنا من حالة التحلل و لأصبح القيد الثاني و القيد الرابع نشطين و بالتالي فقيمة السعر الثنائي للقيد الثاني لا تساوي صفراً. كما يمكن أن نلاحظ أن قيمة النقصان المسموح به للقيد الرابع في الشكل 5–5 تساوي الصفر مما يعني أنه عند هذه القيمة أصبح نشطاً و لو نقصت قيمة الجانب الأيمن للقيد الرابع بأي قيمة فإن الحل الأمثل سيتغير. و لو زادت قيمة الجانب الأيمن للقيد الرابع أي زيادة و لو كانت بسيطة فسيرجع إلى وضعه السابق كقيد غير نشط، و بالتالي فإن الزيادة المسموح بها للقيد الرابع مالانهاية . و هذا كله بسبب أن القيد الرابع في ظاهره قيدٌ نشط و لكن في حقيقته عند هذه النقطة هو قيدُ غير نشط و هذا خاص بحالة التحلل. لاحظ أن المتغيرات الموجبة هي X_1, X_2, S_1 فقط و عدد القيود أربعة.

أما إذا كانت الزيادة أو النقصان لقيمة الجانب الأيمن لقيدٍ غير نشط ضمن المدى المسموح به فإن الحل الأمثل الحالي لن يتغير لأن أثر التغير لهذا القيد غير النشط لا يؤثر على نقطة الحل الأمثل في هذه الحالة. فإذا زاد مثلاً الجانب الأيمن للقيد الأول (قيد غير نشط) بوحدة واحدة فإن هذه الزيادة ضمن المدى المسموح به وبالتالي فإن الحل الأمثل الحالي (القيود النشطة) و قيم المتغيرات و قيمة دالة الهدف لن يحدث فيهن أي تغير و يظهر ذلك جلياً عندما نلاحظ أن السعر الثنائي لهذا القيد يساوي صفراً. أما لو زاد الجانب الأيمن لهذا القيد بقيمة الزيادة المسموح بها وهي 7.090909 فإن ذلك يعني: 1) الحل الأمثل لن يتغير 2) و لن تتغير قيم المتغيرات 3) و لن تتغير قيمة دالة الهدف ولكن سيصبح القيد الأول قيداً نشطاً في ظاهره غير نشطٍ في حقيقته (كما في الشكل 5–6). أما إذا زاد عن قيمة الزيادة المسموح بها فإن الحل الأمثل سيتغير جذرياً و سنحتاج إلى إعادة حل المسألة وخاصة إذا كان عدد المتغيرات أكبر من اثنين.

قاعدة 5–7:

السعر الثنائي (سعر الظل) لا يساوي صفراً للقيود النشطة لكن يمكن أن يساوي صفراً في حالة إذا كان القيد على شكل معادلة و يساوي صفراً للقيود غير النشطة.

إذا كان اتجاه القيد أكبر من للقيود غير النشطة فإن النقصان المسموح به يساوي مالا نهاية و الزيادة المسموح بها تساوي قيمة المتغير المكمل لنفس القيد.

إذا كان اتجاه القيد أصغر من للقيود غير النشطة فإن الزيادة المسموح بها تساوي مالا نهاية و النقصان المسموح به تساوي قيمة المتغير المكمل لنفس القيد.

التكلفة المخفضة Reduced Cost: و تختص بمعاملات القرار فقط و قيمتها دائماً موجبة إذا كانت قيمة المتغير صفراً عند الحل الأمثل و قيمتها دائماً صفراً إذا كانت قيمة المتغير موجبة عند الحل الأمثل. و هي القيمة التي لو أُضيفت إلى معامل متغير القرار في دالة الهدف (في حالة Max) و الذي قيمته صفراً عند الحل

الأمثل فإن قيمة هذا المتغير ستتحول إلى قيمة موجبة. و تُطرح قيمة التكلفة المخفضة من معامل المتغير في دالة الهدف (في حالة Min) لتتحول قيمة المتغير إلى قيمة موجبة. و لذلك فإن قيمة التكلفة المخفضة لمتغيرات القرار الموجبة ستكون صفراً و هي الحالة الموجودة في مثالنا كما في الشكل 5-4. لكن لو كان لدينا متغير قرار X قيمته تساوي الصفر عند الحل الأمثل و قيمة التكلفة المخفضة له تساوي 100 ريال و كانت المسألة Max و كان معامل هذا المتغير X في دالة الهدف 500 ريال، فاذا أردنا تحويل X إلى قيمة موجبة (بمعنى أننا نريد أن ننتج من X) فإننا يجب أن نزيد قيمة معامله في دالة الهدف بقيمة 100 ريال على الأقل أي تصبح قيمة المعامل 600 ريال أو اكثر. هنا إذا كانت قيمة معامل X في دالة الهدف تساوي 600 ريال فسيكون لدينا حلان: الأول يمثل الحل الأمثل الحالي أي لا ننتج من X و تبقى قيم المتغيرات الأخرى و قيمة دالة الهدف بدون تغيير، و الثاني يتغير فيه الحل الأمثل الحالي (تتغير مجموعة القيود النشطة) و تتغير قيمة X فتصبح قيمة موجبة و بالتالي تتغير قيم المتغيرات الأخرى و لكن لا تتغير قيمة دالة الهدف و لذلك يُسمى حل أمثل متعدد أو بديل. أما إذا كانت قيمة معامل X في دالة الهدف أكبر من 600 ريال أي زاد معامل X في دالة الهدف زيادة أكبر من قيمة التكلفة المخفضة فإن لحل الأمثل الحالي يتغير (تتغير مجموعة القيود النشطة) و كذلك فإن قيم المتغيرات و قيمة دالة الهدف ستتغيران و تصبح X ذات قيمة موجبة.

و تظهر قيمة التكلفة المخفضة تحت عمود الزيادة المسموح بها في مدى معاملات دالة الهدف للمتغير الذي قيمته تساوي الصفر عند الحل الأمثل و يكون النقصان المسموح به يساوي مالانهاية و ذلك في حال التعظيم(Max) و العكس صحيح في حالة التخفيض (Min).

قاعدة 5-8: إذا كان متغير القرار يساوي صفراً و أردنا تغيير قيمته إلى قيمة موجبة فيجب:
حالة Maximization: إضافة قيمة التكلفة المخفضة أو أكثر إلى معامل المتغير في دالة الهدف.
حالة Minimization: طرح قيمة التكلفة المخفضة أو أكثر من معامل المتغير في دالة الهدف.

```
Min 5X1 + 2X2
Subject to
3X1 + 6X2 >= 18
5X1 + 4X2 >= 28.117647
8X1 + 2X2 >= 16
7X1 + 6X2 <= 42
LP OPTIMUM FOUND AT STEP      3
        OBJECTIVE FUNCTION VALUE
             1)  14.94118
  VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
        X1             0.352941        0.000000
        X2             6.588235        0.000000
       ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
       2)                 22.588236          0.000000
       3)                  0.000000          -0.272727
       4)                  0.000000          -0.454545
       5)                  0.000000           0.000000
```

NO. ITERATIONS= 3

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

OBJ COEFFICIENT RANGES

VARIABLE	CURRENT COEF	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
X1	5.000000	3.000000	2.500000
X2	2.000000	2.000000	0.750000

RIGHTHAND SIDE RANGES

ROW	CURRENT RHS	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
2	18.000000	22.588236	INFINITY
3	28.117647	0.000000	11.831933
4	16.000000	27.607843	0.000000
5	42.000000	INFINITY	0.000000

شكل 5-5

```
Min 5X1 + 2X2
Subject to
3X1 + 6X2 >= 25.090909
5X1 + 4X2 >= 20
8X1 + 2X2 >= 16
7X1 + 6X2 <= 42
LP OPTIMUM FOUND AT STEP      0
        OBJECTIVE FUNCTION VALUE
             1)        12.72727
  VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
        X1              1.090909         0.000000
        X2              3.636364         0.000000
       ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
        2)                  0.000000                 0.000000
        3)                  0.000000                -0.272727
        4)                  0.000000                -0.454545
        5)                 12.545455                 0.000000
 NO. ITERATIONS=       0
 RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:
                         OBJ COEFFICIENT RANGES
 VARIABLE        CURRENT      ALLOWABLE        ALLOWABLE
                   COEF           INCREASE           DECREASE
       X1              5.000000           3.000000               2.500000
       X2              2.000000           2.000000               0.750000
                         RIGHTHAND SIDE RANGES
      ROW        CURRENT        ALLOWABLE        ALLOWABLE
                    RHS            INCREASE           DECREASE
          2        25.090909           0.000000            INFINITY
          3        20.000000           8.117647             0.000000
          4        16.000000           0.000000             6.000000
          5        42.000000           INFINITY           12.545455
```

شكل 6-5

ثالثاً: تحليل الحساسية و جداول السمبلكس:

يمكن استخدام جداول السمبلكس لمعرفة جميع القيم التي تظهر في مخرجات البـرامج الحاسـوبية. المسـألة التالية 5-3 و الجدول النهائي لحلها باستخدام السمبلكس يعطي مثالاً جيداً لايضاح ذلك.

$$\text{Min } w = 6X_1 + X_2 + 3X_3 - 2X_4$$
S.T.
$$X_1 + X_2 \leq 42$$
$$2X_1 + 3X_2 - X_3 - X_4 \geq 10$$
$$X_1 + 2X_3 + X_4 = 30$$
$$X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0$$

		6	1	3	-2	0	0	M	M	
BC	BV	X_1	X_2	X_3	X_4	S_1	S_2	A_2	A_3	RHS
0	S_1	0	0	-1/3	0	1	1/3	-1/3	-1/3	86/3
1	X_2	1	1	1/3	0	0	-1/3	1/3	1/3	40/3
-2	X_4	1	0	2	1	0	0	0	1	30
	Zj	-1	1	-11/3	-2	0	-1/3	1/3	-5/3	-140/3
Cj- Zj		7	0	20/3	0	0	1/3	M-1/3	M+5/3	

أولاً: السعر الثنائي:

لاحظ أننا أبقينا المتغيرات الاصطناعية و ذلك لحاجتنا لها كما سيظهر لاحقاً. في هذه المسألة المتغيرات غير الأساسية هي X_1, X_3, S_2 و بالتالي فقيمة كلٍ منها يساوي صفراً. بما أن S_2 تساوي صفراً فإن القيد الثاني قيدٌ نشط، و بما أن القيد الثالث على شكل معادلة و لدينا حل أمثل فإن القيد الثالث قيدٌ نشط كذلك. و كما أوضحنا سابقاً فإن القيود النشطة يقابلها أسعار ثنائية لا تساوي الصفر، و لإيجاد هذه الأسعار الثنائية فيجب النظر إلى صف Zj بالنسبة للمتغيرات المكملة. بالنسبة للمتغير غير الأساسي S_2 و الذي يمثل القيد الثاني فإن قيمة السعر الثنائي تساوي 1/3- وهي القيمة الموجودة في عمود S_2 و صف Zj. و يلاحظ أن هذه القيمة سالبة و هي ناتجة من كون هذا القيد ذا اتجاه أكبر من. بالنسبة للقيد النشط الآخر فهو القيد الثالث و بما أن هذا القيد على شكل معادلة فإن قيمة السعر الثنائي توجد في عمود A_3 (لأن هذا القيد لا يحتوي على متغير مكمل) و صف Zj و لكن بعد عكس الإشارة. أما بالنسبة للقيود غير النشطة مثل القيد الأول فإن السعر الثنائي المقابل لها يساوي الصفر و هي موجودة كذلك في الصف Zj و عمود S_1.

القيد	حالة القيد	المتغير المؤثر	السعر الثنائي
الأول	غير نشط	S_1	0
الثاني	نشط	S_2	-1/3
الثالث	نشط	A_3	5/3

قاعدة 5-9:

الأسعار الثنائية هي القيمة الموجودة في صف Zj للمتغيرات المكملة للقيد.

إذا كان القيد على شكل معادلة فإن قيمة السعر الثنائي توجد في صف Zj للمتغير الاصطناعي للقيد بعد عكس الإشارة.

ثانياً:التغير في قيم الجانب الأيمن:

يمكن إيجاد الزيادة المسموح بها والنقصان المسموح به من جداول السمبلكس و ذلك باتباع القاعدة التالية:

قاعدة 5-10:

للقيود النشطة:

المتغيرات المحددة هي المتغيرات الأساسية في الجدول الأول للسمبلكس.

الزيادة المسموح بها هي أصغر قيمة مطلقة للنسبة $[\{RHS_{(i)}/a_{ij}\}]$ بحيث $a_{ij}<0$، فإن لم نجد فهي مالانهاية.

النقصان المسموح به هو أصغر قيمة للنسبة $[\{RHS_{(i)}/a_{ij}\}]$ بحيث $a_{ij}>0$، فإن لم نجد فهي مالانهاية.

a_{ij}: معامل المتغير المحدد في الصف i و العمود j، و لا تُقبل إذا كانت $a_{ij}=0$.

للقيود غير النشطة:

النقصان المسموح به يساوي قيمة المتغيرالمكمل والزيادة المسموح بها تساوي مالا نهاية إذا كان القيد ذا اتجاه أصغر من و العكس صحيح إذا كان اتجاه القيد أكبر من.

$RHS_{(i)}$: الجانب الأيمن للقيد i.

أ. **التغير في قيم الجانب الأيمن للقيود النشطة: في مثالنا هذا نلاحظ أن القيد الثاني (قيد نشط) و بالتالي فإن المتغير المحدد هو المتغير A_2 و ذلك لأن المتغير الإصطناعي A_2 كان المتغير الأساسي في الجدول الأول و بناء على ذلك فإن الزيادة المسموح بها تكون بقسمة الجانب الأيمن في كل قيد على قيم العمود A_2 في الجدول الأخير ذات القيم السالبة ثم تحويل هذه القيم إلى قيم مطلقة و من ثم اختيار الأصغر من بينها. في هذه المسألة لا يوجد غير قيمة واحدة سالبة في عمود A_2 وهي (-1/3) و بالتالي بعد قسمة الجانب الأيمن على هذه القيمة فنحصل على الزيادة المسموح بها و هي 86. بالنسبة للنقصان المسموح به يكون بقسمة الجانب الأيمن في كل قيد على قيم العمود A_2 في الجدول الأخير ذات القيم الموجبة و من ثم اختيار الأصغر من بينها. في هذه المسألة لا يوجد غير قيمة واحدة موجبة و هي (1/3) في عمود A_2 و بالتالي بعد قسمة الجانب الأيمن على هذه القيمة فنحصل**

على النقصان المسموح به و هو 40. أما بالنسبة للقيد الثالث فإن الزيادة المسموح بها تكون بقسمة الجانب الأيمن في كل قيد على قيم العمود A_3 في الجدول الأخير ذات القيم السالبة ثم تحويل هذه القيم إلى قيم مطلقة و من ثم اختيار الأصغر من بينها. في هذه المسألة لا يوجد غير قيمة واحدة سالبة في عمود A_3 و بالتالي بعد قسمة الجانب الأيمن على هذه القيمة نحصل على الزيادة المسموح بها و هي 86. بالنسبة للنقصان المسموح به يكون بقسمة الجانب الأيمن في كل قيد على قيم العمود A_3 في الجدول الأخير ذات القيم الموجبة و من ثم اختيار الأصغر من بينها. في هذه المسألة يوجد قيمتان موجبتان في عمود A_3 وهما (1/3 و 1) وبعد قسمة الجانب الأيمن على هذه القيم فنحصل على (40 و 30) و 30 هي القيمة الأصغر و بالتالي النقصان المسموح به يساوي 30.

ب. التغير في قيم الجانب الأيمن للقيود غير النشطة: في مثالنا هذا نلاحظ أن القيد الأول غير نشط و بتطبيق القاعدة السابقة فالنقصان المسموح به يساوي قيمة المتغير المكمل S_1 و هو 86/3 و ذلك لأن اتجاه القيد أصغر من، أما الزيادة المسموح بها فتساوي مالا نهاية و ذلك لنفس السبب. و لو كان القيد الأول ذا اتجاه أكبر من لكان النقصان المسموح مالا نهاية و الزيادة المسموح بها قيمة المتغير المكمل.

التكلفة المخفضة و مدى معاملات دالة الهدف:

توجد قيم التكلفة المخفضة في الصف Cj-Zj و ذلك لمتغيرات القرار فقط. فإذا كان متغير القرار متغيراً غير أساسيٍ فإن قيمة التكلفة المخفضة له هي القيمة المطلقة في صف Cj-Zj، و بالنسبة لمتغيرات القرار إذا كانت أساسية فإن التكلفة المخفضة تساوي الصفر دائماً. في مثالنا هذا المسألة 5-3 نجد أن المتغيرين X_1 و X_3 هما متغيرا القرار غير الأساسيين و بالتالي فتكلفتهما المخفضة هي 7 و 40/6 على التوالي و هي في الوقت نفسه قيمة النقصان المسموح به حيث أن المسألة Min. لكن لو كانت المسألة Max فإن قيمة التكلفة المخفضة لمتغيرات القرار غير الأساسية ستكون هي الزيادة المسموح بها.

أ. معاملات المتغيرات غير الأساسية في دالة الهدف: في مثالنا هذا المتغيران X_1 و X_3 هما متغيرا القرار غير الأساسيين و بالتالي فإن قيمة النقصان المسموح به هي تكلفتهما المخفضة و هي (7 و 40/6 على التوالي) حيث أن المسألة Min كما ذكرنا سابقاً و لنفس السبب (المسألة Min) فإن الزيادة المسموح بها لمعاملاتها في دالة الهدف تساوي مالا نهاية حيث أن هذه المتغيرات لم يتم اعتبارها أساسية و هي بقيم معاملاتها الحالية. و الوضع سيكون أسوأ عند زيادة قيمة معاملاتها في دالة الهدف في الوقت الذي نرغب فيه في تخفيض قيمة دالة الهدف (تخفيض التكاليف مثلاً). (لاحظ أن العكس صحيح في حالة Max حيث سيكون النقصان المسموح به يساوي مالا نهاية، و قيمة التكلفة المخفضة، الموجودة في صف Cj-Zj، هي الزيادة المسموح بها. لماذا؟)

و تظهر هذه القيم كذلك في مدى معاملات دالة الهدف تحت عمود النقصان المسموح به (الشكل 5-7) لأن المسألة Min، و تظهر قيم مالا نهاية تحت عمود الزيادة المسموح بها لأن الزيادة لن تغير في الحل الأمثل مهما كانت قيمتها.

ب. معاملات المتغيرات الأساسية في دالة الهدف: بالنسبة لمتغيرات القرار الأساسية X_2 و X_4، فإن هذا المدى سيظهر كالتالي: لو أضفنا إلى معامل X_2 قيمة تساوي Δ حيث $(\Delta>0)$ عند الزيادة و $(\Delta<0)$ عند النقصان، فإن جدول السمبلكس النهائي سيظهر كالتالي: (لاحظ أن التأثير سيقع في صف Cj-Zj للمتغيرات غير الأساسية و دالة الهدف فقط)

		6	1+Δ	3	-2	0	0	
BC	BV	X_1	X_2	X_3	X_4	S_1	S_2	RHS
0	S_1	0	0	-1/3	0	1	1/3	86/3
1+Δ	X_2	1	1	1/3	0	0	-1/3	40/3
-2	X_4	1	0	2	1	0	0	30
	Zj	-1+Δ	1+Δ	-11/3+Δ/3	-2	0	-1/3-Δ/3	-140/3+40Δ/3
Cj- Zj		7-Δ	0	20/3-Δ/3	0	0	1/3+Δ/3	

و الآن حتى يبقى الحل الأمثل كما هو، فإن قيم Cj-Zj للمتغيرات غير الأساسية يجب أن تكون موجبة أو تساوي صفراً لأن المسألة Min. و لتحقيق ذلك نقوم بالتالي بالنسبة لقيم Cj-Zj للمتغيرات غير الأساسية:

$7 - \Delta \geq 0 \quad ====\!\!\!\Rightarrow 7 \geq \Delta$
$20/3 - 1\Delta/3 \geq 0 \quad ====\!\!\!\Rightarrow 20 \geq \Delta$
$1/3 + \Delta/3 \geq 0 \quad ====\!\!\!\Rightarrow 1 \geq -\Delta \quad ====\!\!\!\Rightarrow -1 \leq \Delta$

الزيادة المسموح بها هي أصغر قيمة موجبة تساويها Δ: {min(7,20)} وهي هنا 7.

النقصان المسموح به هو القيمة المطلقة لأصغر قيمة سالبة تساويها Δ: {min(-1)} وهي هنا -1. إذاً النقصان المسموح به يساوي 1.

و يمكن عمل نفس الشيء بالنسبة للمتغير X_4 كالتالي:

		6	1	3	-2+Δ	0	0	
BC	BV	X_1	X_2	X_3	X_4	S_1	S_2	RHS
0	S_1	0	0	-1/3	0	1	1/3	86/3
1	X_2	1	1	1/3	0	0	-1/3	40/3
-2+Δ	X_4	1	0	2	1	0	0	30
	Zj	-1+Δ	1	-11/3+2Δ	-2+Δ	0	-1/3	-140/3+30Δ
Cj- Zj		7-Δ	0	20/3-2Δ	0	0	1/3	

$7 - \Delta \geq 0 \quad ====\!\!\!\Rightarrow 7 \geq \Delta$

$20/3 - 2\Delta \geq 0$ ====➔ $10/3 \geq \Delta$

الزيادةالمسموح بها هي أصغر قيمة موجبة تساويها Δ: {min(7,10/3)} وهي هنا 10/3.

حيث لا يوجد قيمة سالبة تساويها Δ فالنقصان المسموح به يساوي مالا نهاية.

الشكل 5–7 يظهر هذه القيم في مخرجات برنامج LINDO.

Min $6X_1 + X_2 + 3X_3 - 2X_4$
Subject to

$$X_1 + X_2 \le 42$$
$$2X_1 + 3X_2 - X_3 - X_4 \ge 10$$
$$X_1 + 2X_3 + X_4 = 30$$

LP OPTIMUM FOUND AT STEP 3

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) - 46.66667

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X_1	0.000000	7.000000
X_2	13.333333	0.000000
X_3	0.000000	6.666667
X_4	30.000000	0.000000

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
2)	28.666666	0.000000
3)	0.000000	-0.333333
4)	0.000000	1.666667

NO. ITERATIONS= 3

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

OBJ COEFFICIENT RANGES

VARIABLE	CURRENT COEF	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
X_1	6.000000	INFINITY	7.000000
X_2	1.000000	7.000000	1.000000
X_3	3.000000	INFINITY	6.666667
X_4	-2.000000	3.333333	INFINITY

RIGHTHAND SIDE RANGES

ROW	CURRENT RHS	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
2	42.000000	INFINITY	28.666666
3	10.000000	85.999992	39.999996
4	30.000000	85.999992	30.000000

شكل 5-7

العلاقة بين الجانب الأيمن للقيود و دالة الهدف:

سنتحدث هنا عن العلاقة بين قيم الجانب الأيمن للقيود و قيمة دالة الهدف عند الحل الأمثل و كيفية إتخاذ القرارات حيال هذه العلاقة. سنبدأ بعرض المسألة التالية 5-4 لإيضاح ذلك:

مسألة (5-4): تقوم شركة الرياض للجلود بتصنيع أربعة أنواع من حقائب رجال الأعمال و تستلزم عملية إنتاج الحقيبة إلى كمية من المواد الخام الممثلة بالجلود و ساعات عمل لحياكة هذه الجلود. الجدول التالي يمثل المواد الخام بالقدم المربع و ساعات العمل اللازمة لإنتاج كل نوع و سعر البيع للوحدة الواحدة من كل نوع. حالياً، تملك الشركة 5000 قدم مربع من الجلود و 6000 ساعة عمل و لتلبية طلبات العملاء فلابد من إنتاج 900 حقيبة منها على الأقل 300 من النوع الرابع. المطلوب حل هذه المسالة على شكل برنامج خطي لتعظيم حجم المبيعات.

المدخلات	النوع 1	النوع 2	النوع 3	النوع 4
مواد خام للوحدة	2	3	5	6
ساعات العمل للوحدة	3	4	7	9
سعر البيع للوحدة	250	300	400	450

يمكن كتابة الصيغة الرياضية لهذه المسالة على شكل برنامج خطي كالتالي:

Xj= عدد الحقائب المنتجة من النوع j. حيث j = 1,2,3,4

$$\text{Max } 250X_1 + 300X_2 + 400X_3 + 450X_4$$

Subject to

$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 900$ قيد الطلب على جميع الأنواع

$2X_1 + 3X_2 + 5X_3 + 6X_4 \leq 5000$ قيد المواد الخام

$3X_1 + 4X_2 + 7X_3 + 9X_4 \leq 6000$ قيد ساعات العمل

$X_4 \geq 300$ قيد كمية الإنتاج من النوع الرابع

$X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0$

في هذه المسألة نلاحظ أن قيمة دالة الهدف 345000 ريال كما في الشكل 5-8 و هذه القيمة ناتجة من الالتزام بالشروط المصاغة رياضياً على شكل قيود. ماذا لو قمنا بتغيير قيم الجانب الأيمن للقيود، ماذا يحدث لدالة الهدف؟ تحدثنا سابقاً عن أثر التغير في قيم الجانب الأيمن على دالة الهدف و أوضحنا أنه يوجد مدى مسموح به لقيم الجانب الأيمن تظل فيه القيود النشطة نشطة (لا يتغير الحل الأمثل) و في ظل هذا المدى المسموح به تتغير قيمة دالة الهدف تبعاً لتغير قيمة الجانب الأيمن إذا كان القيد نشطاً و لا تتغير قيمة دالة الهدف إذا كان

القيد غير نشطٍ. هذا التغير يكون بإضافة أو طرح حجم التغير مضروباً في السعر الثنائي حسب القاعدة المذكورة سابقاً (5-6).

```
Max 250X1 + 300X2 + 400X3 + 450X4
Subject to
X1 + X2 + X3 + X4 = 900
2X1 + 3X2 + 5X3 + 6X4 <= 5000
3X1 + 4X2 + 7X3 + 9X4 <= 6000
X4 >= 300
LP OPTIMUM FOUND AT STEP      4
      OBJECTIVE FUNCTION VALUE
      1)     345000.0
 VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
      X1               0.000000          16.666666
      X2             300.000000           0.000000
      X3             300.000000           0.000000
      X4             300.000000           0.000000
     ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
       2)              0.000000            166.666672
       3)            800.000000              0.000000
       4)              0.000000             33.333332
       5)              0.000000            -16.666666
NO. ITERATIONS=       4
 RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:
                    OBJ COEFFICIENT RANGES
 VARIABLE          CURRENT        ALLOWABLE        ALLOWABLE
                      COEF           INCREASE          DECREASE
     X1             250.000000       16.666668          INFINITY
     X2             300.000000       24.999998         12.500002
     X3             400.000000       50.000004         10.000000
     X4             450.000000       16.666666          INFINITY
                    RIGHTHAND SIDE RANGES
    ROW              CURRENT        ALLOWABLE        ALLOWABLE
                        RHS            INCREASE          DECREASE
      2          900.000000        225.000000        128.571426
      3         5000.000000         INFINITY         800.000000
      4         6000.000000        900.000000        900.000000
      5          300.000000        180.000000        300.000000
```

شكل 5-8

لكن ماذا يحدث إذا كان التغير خارج المدى المسموح به. كمثال على ذلك لو زاد الجانب الأيمن للقيد الثالث و هو قيد نشط ذا اتجاه أصغر من بوحدة واحدة أكثر من الزيادة المسموح بها فأصبحت قيمة الجانب الأيمن 6901. بما أن الزيادة أكبر من الزيادة المسموح بها فإن هذا يعني أن الحل الأمثل الحالي سيتغير (ستتغير مجموعة القيود النشطة) لكن قيمة دالة الهدف ستستمر في التزايد (التحسن) لكن بقيمة السعر الثنائي الجديد 25 ريالاً لكل ساعة الإضافية كما في الشكل 5-9 و ستستمر هذه القيمة للسعر الثنائي حتى الزيادة المسموح بها الجديدة و هي 400 ساعة عمل أي عندما نصل للحد الأعلى الجديد و هو 7300 و هنا ستتغير قيمة السعر الثنائي بعد هذا الحد فعند 7301 ساعة عمل تصبح قيمة السعر الثنائي الجديدة صفراً حيث يتحول هذا القيد إلى

قيدٍ غير نشط و يكون هناك فائضٌ في ساعات العمل بعد 7300 ساعة عمل مع بقاء جميع العناصر الأخرى ثابتة كما هي.

بالمثل لو نقص الجانب الأيمن للقيد الثالث بقيمة أكثر من المسموح بها و هي 900 ساعة عمل فأصبح 5099 ساعة مثلاً. حيث أن النقصان أكبر من المسموح به فإن هذا يعني أن الحل الأمثل الحالي سيتغير (ستتغير مجموعة القيود النشطة) لكن قيمة دالة الهدف ستستمر في الإنخفاض (تسؤ) لكن بقيمة السعر الثنائي الجديد 50 ريالاً لكل ساعة ناقصة كما في الشكل 5-9 و تستمر هذه القيمة الجديدة عند خفض الجانب الأيمن للقيد الثالث حتى الحد الأدنى للنقصان المسموح به الجديد و هو 4500 ساعة أي بنقصان مسموح به يساوي 600 ساعة عمل. إذا استمررنا في خفض قيمة الجانب الأيمن بأكثر من 600 ساعة أي لو خفضنا قيمة الجانب الأيمن للقيد الثالث فأصبحت 4499 ساعة فإن المسألة ستتحول إلى مسألة غير ممكنة الحل (INFEASIBLE).

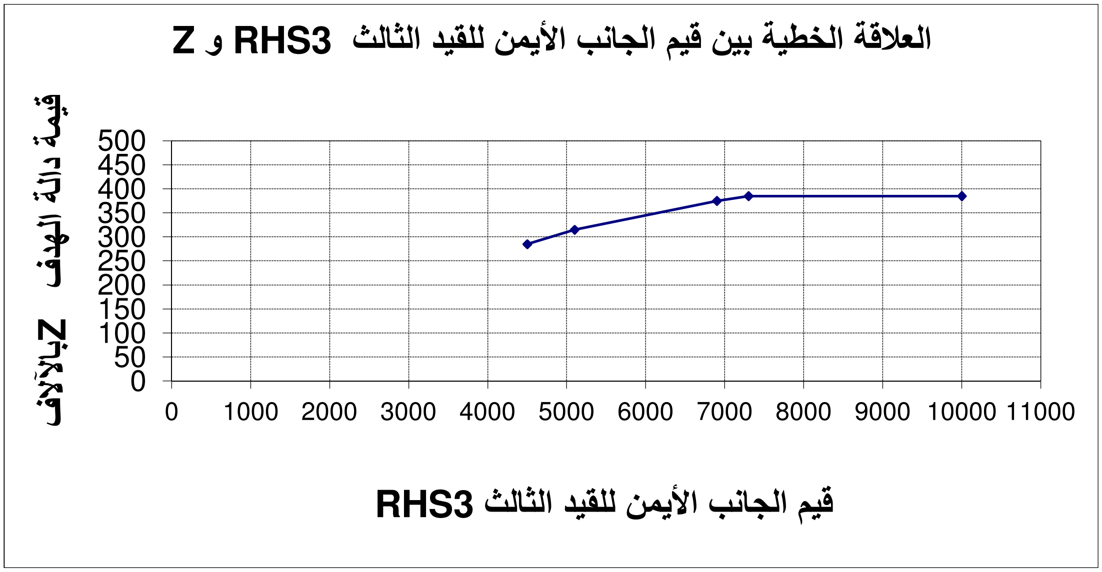
```
Max 250X1 + 300X2 + 400X3 + 450X4
Subject to
X1 + X2 + X3 + X4 = 900
2X1 + 3X2 + 5X3 + 6X4 <= 5000
3X1 + 4X2 + 7X3 + 9X4 <= 6901
X4 >= 300
LP OPTIMUM FOUND AT STEP      0
      OBJECTIVE FUNCTION VALUE
      1)      375025.0
 VARIABLE        VALUE         REDUCED COST
      X1            0.000000        50.000000
      X2            0.000000        25.000000
      X3          599.500000         0.000000
      X4          300.500000         0.000000
     ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
      2)              0.000000          225.000000
      3)          199.500000            0.000000
      4)              0.000000           25.000000
      5)              0.500000            0.000000
 NO. ITERATIONS=      0
 RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:
                    OBJ COEFFICIENT RANGES
 VARIABLE        CURRENT       ALLOWABLE       ALLOWABLE
                   COEF          INCREASE        DECREASE
     X1          250.000000      50.000000         INFINITY
     X2          300.000000      25.000000         INFINITY
     X3          400.000000      50.000000        10.000000
     X4          450.000000      16.666666        50.000000
                    RIGHTHAND SIDE RANGES
    ROW       CURRENT       ALLOWABLE       ALLOWABLE
                 RHS          INCREASE        DECREASE
      2        900.000000      0.142857       133.222229
      3       5000.000000      INFINITY       199.500000
      4       6901.000000    399.000000         1.000000
      5        300.000000      0.500000        INFINITY
```

شكل 5-9

```
Max 250X1 + 300X2 + 400X3 + 450X4
Subject to
X1 + X2 + X3 + X4 = 900
2X1 + 3X2 + 5X3 + 6X4 <= 5000
3X1 + 4X2 + 7X3 + 9X4 <= 7300
X4 >= 300
LP OPTIMUM FOUND AT STEP      0
      OBJECTIVE FUNCTION VALUE
      1)      385000.0
 VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
      X1            0.000000          0.000000
      X2            0.000000          0.000000
      X3        400.000000          0.000000
      X4        500.000000          0.000000
     ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
      2)                0.000000           150.000000
      3)                0.000000             50.000000
      4)                0.000000               0.000000
      5)            200.000000               0.000000
 NO. ITERATIONS=       0
 RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:
                      OBJ COEFFICIENT RANGES
 VARIABLE        CURRENT        ALLOWABLE        ALLOWABLE
                          COEF           INCREASE          DECREASE
     X1            250.000000        0.000000           INFINITY
     X2            300.000000        0.000000           INFINITY
     X3            400.000000       50.000000           0.000000
     X4            450.000000        0.000000          50.000000
                       RIGHTHAND SIDE RANGES
    ROW       CURRENT        ALLOWABLE        ALLOWABLE
                      RHS           INCREASE          DECREASE
      2        900.000000      40.000000          0.000000
      3      5000.000000       0.000000        200.000000
      4      7300.000000      INFINITY           0.000000
      5        300.000000     200.000000         INFINITY
```

شكل 5−10

هنا لا بد من ملاحظة أنه عند الرسم لبياني (شكل 5−11) لدالة الهدف كدالة في قيم الجانب الأيمن للقيد الثالث (قيد نشط ذا اتجاه أصغر من) فإن الخط البياني يتكون من مجموعة مستقيمات أو قطع مستقيمة لكلٍ منها ميل يمثل قيمة السعر الثنائي في كل مدى مسموح به [Winston, 2003]. و حيث أن هذه المسألة على شكل Max و القيد ذا اتجاه أصغر من فإن ميل كل قطعة مستقيمة تكون غير سالبة مما يعني أن إضافة موارد جديدة لهذا القيد هي إضافة نافعة و ستحسن من قيمة دالة الهدف. كما نلاحظ في الشكل 5−11 و الجدول 5−1 أن ميول هذه القطع المستقيمة (الأسعار الثنائية) تكون متناقصة حيث أنه مع زيادة قيمة الجانب الأيمن تتناقص الأسعار الثنائية من 50 إلى 33.33 إلى 25 إلى صفر و يمكن تفسيرها بالقاعدة الاقتصادية تناقص الغلة (Diminishing Rate Of Returns) و التي تعني أنه كلما زادت موارد محددة مع بقاء باقي الموارد كما هي فإن المنفعة الكلية تزداد و لكن بشكل متناقص حتى تصل إلى نقطة معينة تقف عندها ثم تبدأ في الانخفاض.



شكل 5-11

الجانب الأيمن	السعر الثنائي	قيمة دالة الهدف	الأثر على قيمة دالة الهدف
RHS < 4500	المسألة غير ممكنة الحل	المسألة غير ممكنة الحل	المسألة غير ممكنة الحل
$4500 \leq$ RHS < 5100	50	تعتمد على مقدار التغير	تزداد مع الزيادة و تنقص مع النقصان
$5100 \leq$ RHS ≤ 6900	33.33	تعتمد على مقدار التغير	تزداد مع الزيادة و تنقص مع النقصان
6900 < RHS ≤ 7300	25	تعتمد على مقدار التغير	تزداد مع الزيادة و تنقص مع النقصان
RHS > 7300	0	385000	تثبت
10000	0	385000	

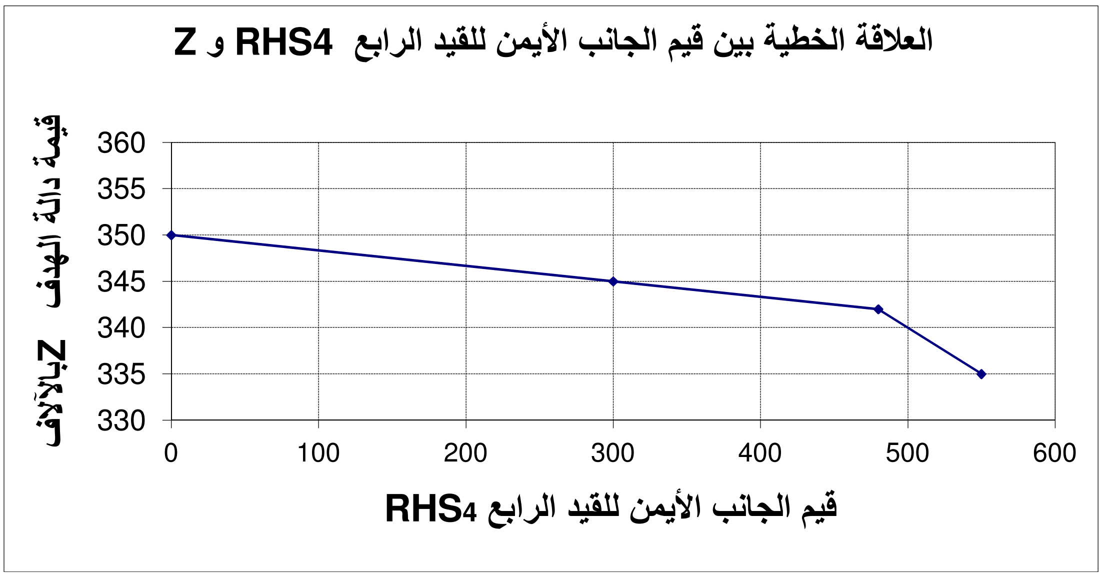
الجدول 5-1

كما يمكن ملاحظة علاقة الجانب الأيمن للقيد الرابع (و هو قيد نشط ذو اتجاه أكبر من) بدالة الهدف الموضح في الشكل 5-12 و ذلك لمسألة Max بأنها يمكن تمثيلها بمجموعة من المستقيمات ذات ميول غير موجبة (أسعار ثنائية) لأن اتجاه القيد أكبر من كما ذكرنا سابقاً في القاعدة 5-5. كما نلاحظ أن ميول القطع المستقيمة متناقصة كما في الجدول 5-2.

الجانب الأيمن	السعر الثنائي	دالة الهدف	الأثر على قيمة دالة الهدف

$0 \leq RHS \leq 480$	-16.6666	تعتمد على مقدار التغير	تنقص مع الزيادة و تزداد مع النقصان
300	-16.6666	345000	
$480 < RHS \leq 550$	-100	تعتمد على مقدار التغير	تنقص مع الزيادة و تزداد مع النقصان
550	-100	335000	
$RHS > 550$	المسألة غير ممكنة الحل	المسألة غير ممكنة الحل	المسألة غير ممكنة الحل

الجدول 5-2



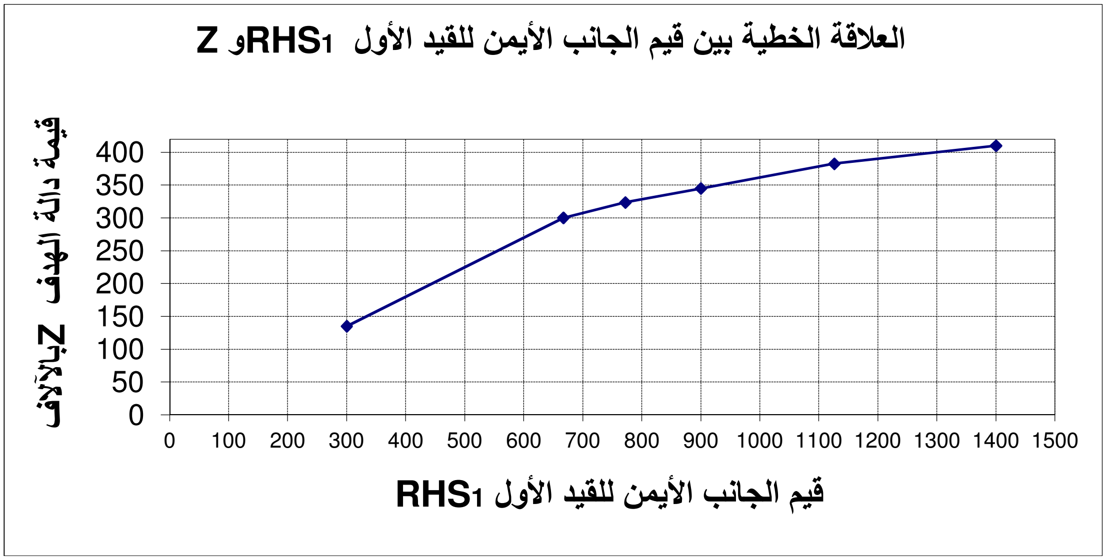
شكل 5–12

في حالة القيد الأول و الذي على شكل معادلة فإن علاقة الجانب الأيمن بدالة الهدف و الموضحة في الشكل 5–13 تكون كذلك ممثلة بمجموعة من المستقيمات ذات ميول (أسعار ثنائية) موجبة أو سالبة كما في القاعدة 5–5 و هذه الميول تكون متناقصة كذلك كما في الجدول 5–3.

الجانب الأيمن	السعر الثنائي	دالة الهدف
أقل من 300	المسألة غير ممكنة الحل	المسألة غير ممكنة الحل
300	450	135000
667	225	300075
772	166.666	323666.7
900	166.666	345000
1125	166.666	382500
1126	100	382600
1400	100	410000

أكثر من 1400	المسألة غير ممكنة الحل	المسألة غير ممكنة الحل

الجدول 5-3



شكل 5–13

في حالة Min فإن الوضع ينعكس حيث أن العلاقة تظل ممثلة بمجموعة من المستقيمات لكنها ذات ميول متزايدة. للقيود النشطة ذات الاتجاه أصغر من يكون ميل القطع المستقيمة سالبة (الأسعار الثنائية مع عكس الإشارة)، و للقيود ذات الاتجاه أكبر من تكون ميول القطع المستقيمة موجبة (الأسعار الثنائية مع عكس الإشارة). الجدول 5–4 يمثل العلاقة بين الجانب الأيمن للقيود و دالة الهدف.

حالة مسألة LP	اتجاه القيد	ميول القطع المستقيمة
Max	أصغر من أو يساوي	موجبة و متناقصة
Max	أكبر من و يساوي	سالبة و متناقصة
Max	يساوي	سالبة أو موجبة و متناقصة
Min	أصغر من أو يساوي	سالبة و متزايدة
Min	أكبر من و يساوي	موجبة و متزايدة
Min	يساوي	سالبة أو موجبة و متزايدة

الجدول 5–4

اتخاذ القرارات لهذه العلاقة:

إن معرفة هذه العلاقة تساعد متخذ القرار في معرفة مدى و حجم الاستثمار في الموارد (ساعات العمل، المواد الخام، ...، و غيرها) و التي يمكنه الاستثمار بها لتعظيم العائد الإجمالي. على سبيل المثال لو كانت تكلفة ساعة العمل الإضافية 20 ريالاً (بافتراض أن تكلفة الساعة الإضافية غير محسوبة ضمن التكلفة الكلية) فيمكن لمتخذ القرار الاستثمار في ساعات العمل بزيادتها إلى 7300 ساعة (أي بزيادة قدرها 1300 ساعة عمل). و يمكن اتخاذ مثل هذا القرار بمعرفة أن ساعة العمل الإضافية تعطي 33.33 ريالاً في التسعمائة ساعة الأولى أي إلى 6900 ساعة ثم ينخفض هذا العائد إلى 25 ريالاً في الأربعمائة ساعة التالية حتى 7300 ساعة و على هذا فإنه بمقارنة تكلفة الساعة الإضافية الواحدة مع العائد الإضافي للساعة الواحدة نجد أن من المصلحة زيادة ساعات العمل و نتوقف عندما تكون تكلفة ساعة العمل الإضافية أكبر من العائد الإضافي للساعة الواحدة.

و لو افترضنا أن ساعة العمل الواحدة تكلف 30 ريالاً فإنه من المنفعة زيادة ساعات العمل حتى 6900 ساعة عمل فقط و نتوقف بعدها عن الزيادة على الرغم من إمكانية زيادة قيمة العائدات الكلية حيث السعر الثنائي ما يزال موجباً في المرحلة التالية (أكثر من 6900 و أقل او تساوي 7300 ساعة عمل). و يمكن تعليل ذلك بأن أي ساعة إضافية ستستهلك من صافي الأرباح الكلية للمنشأة بقيمة 5 ريالات لكل ساعة و التي تمثل الفرق بين تكلفة الساعة الإضافية و السعر الثنائي الجديد 25 ريالاً (السعر العادل أو السعر الحقيقي الأقصى لساعة العمل الواحدة من وجهة نظر المنشأة في هذه المرحلة بغض النظر عن سعر السوق لساعة العمل الواحدة).

الأثر على صافي الأرباح = (السعر الثنائي لساعات العمل – تكلفة ساعة العمل الواحدة) × ساعات العمل

كمثال على ذلك لوزدنا ساعات العمل بعد 6900 ساعة بعدد 10 ساعات إضافية و تكلفة الساعة الإضافية 30 ريالاً فإن الأثر على صافي الأرباح الكلية سيكون كالتالي:

الأثر على صافي الأرباح الكلية = $(25 - 30) \times 10 = -50$ ريالاً

إذاً هذا الأثر سلبي و ضار للمنشأة من ناحية الأرباح الكلية.

إضافة متغير جديد إلى المسألة:

إن إضافة متغير جديد إلى مسألة البرنامج الخطي سيضيف تعقيدات جديدة لحل المسألة. لنأخذ المسألة التالية لتوضيح الحالة:

مسألة (5-5) :

ينتج المصنع الوطني للمكيفات الصحراوية أربعة أنواع من المكيفات ذات مقاسات مختلفة (حصان و نصف، حصان واحد، 0.75 حصان، 0.5 حصان). تقوم العمالة في المصنع بعمل الوصلات الكهربائية و تصنيع الصندوق الخارجي و تركيب القش و تغليف المنتج و خاصةً أن المكيفات تأتي مُصنّعة جزئياً حيث أن المضخات و المولدات الكهربائية و مفاتيح التكييف تُشترى من موردين محليين بأسعار محددة مسبقاً. الجدول التالي يبين الموارد المطلوبة لكل منتج:

الموارد	1.5 حصان	حصان	0.75 حصان	0.5 حصان	الحد الأقصى
عمالة بالدقيقة:					
الوصلات الكهربائية:	20	15	12	12	1440
تصنيع الصندوق:	55	50	50	40	2700
تركيب القش و التغليف:	10	8	6	6	480
الألواح المعدنية بالمتر:	6	4	3	2.5	350
القش بالكيلو:	1.5	1.25	1	1	75

الجدول 5-5

فإذا علمت أن سعر البيع للمكيفات 1200، 1000، 900، 800 ريالاً على التوالي فما هي الصيغة الرياضية المناسبة لتعظيم حجم المبيعات.

يمكن صياغة هذه المسألة كالتالي:

$$\text{Max } 1200X_1 + 1000X_2 + 900X_3 + 800X_4$$

S.T.

$20X_1 + 15X_2 + 12X_3 + 12X_4 \leq 1440$ قيد الوصلات الكهربائية

$55X_1 + 50X_2 + 50X_3 + 40X_4 \leq 2700$ قيد تصنيع الصندوق

$10X_1 + 8X_2 + 6X_3 + 6X_4 \leq 480$ قيد تركيب القش و التغليف

$6X_1 + 4X_2 + 3X_3 + 2.5X_4 \leq 350$ قيد الألواح المعدنية بالمتر

$1.5X_1 + 1.25X_2 + X_3 + X_4 \leq 75$ قيد القش بالكيلو

$X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0$

و الحل الأمثل لهذه المسألة موجود في الشكل 5-14 و فيه تكون قيمة دالة الهدف تساوي 58285.71 ريالاً و يتم إنتاج 42.857143 وحدة من المنتج الأول (1.5 حصان) و 8.571428 وحدة مـن المنـتج الرابـع (0.5 حصان) و صفر من باقي المنتجات.

$\text{Max } 1200X_1 + 1000X_2 + 900X_3 + 800X_4$

S.T.

$20\,X_1 + 15X_2 + 12X_3 + 12X_4 <= 1440$

$55\,X_1 + 50X_2 + 50X_3 + 40X_4 <= 2700$

$10\,X_1 + 8X_2 + 6X_3 + 6X_4 <= 480$

$6\,X_1 + 4X_2 + 3X_3 + 2.5X_4 <= 350$

$1.5\,X_1 + 1.25X_2 + X_3 + X_4 <= 75$

LP OPTIMUM FOUND AT STEP 2

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 58285.71

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X_1	42.857143	0.000000
X_2	0.000000	28.571428
X_3	0.000000	14.285714
X_4	8.571428	0.000000

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
2)	480.000000	0.000000
3)	0.000000	11.428572
4)	0.000000	57.142857
5)	71.428574	0.000000
6)	2.142857	0.000000

NO. ITERATIONS = 2

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

OBJ COEFFICIENT RANGES

VARIABLE	CURRENT COEF	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABL DECREASE
X_1	1200.000000	16.666679	99.999992
X_2	1000.000000	28.571438	INFINITY
X_3	900.000000	14.285725	INFINITY
X_4	800.000000	72.727272	5.882356

RIGHTHAND SIDE RANGES

ROW	CURRENT RHS	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
2	1440.000000	INFINITY	480.000000
3	2700.000000	150.000000	59.999996
4	480.000000	10.909091	75.000000
5	350.000000	INFINITY	71.428574
6	75.000000	INFINITY	2.142857

الشكل 5-14

و الآن ماذا يحدث عند إضافة متغير جديد إلى المسألة:

لنفرض أن إدارة المصنع ترغب في إضافة منتج جديد عبارة عن مكيف صحراوي 0.5 حصان متنقل و بيعه بسعر 900 ريال للوحدة الواحدة. هذا النوع من المنتجات يستدعي استخدام نفس الموارد السابقة مع ثبات الحدود القصوى للموارد كما في الجدول و الذي يبين أيضاً تكلفة إنتاج الوحدة الواحدة من هذا المنتج.

الموارد	0.5 حصان متنقل	الحد الأقصى	التكاليف
مواد جاهزة			340
عمالة بالدقيقة:			
الوصلات الكهربائية:	15	1440	7.5
تصنيع الصندوق:	50	2700	25
تركيب القش و التغليف:	6	480	3
الألواح المعدنية بالمتر:	3	350	60
القش بالكيلو:	1	75	15
إجمالي التكاليف للوحدة			450.5

الجدول 5-6

يمكن حساب الأثر الناتج من إضافة هذا المتغير على الحل الأمثل بحساب قيمة Cj-Zj لهذا المتغير و التي تمثل المنفعة المفقودة التي يمكن أن تحسن قيمة دالة الهدف. لكن هذه القيمة تعتمد على عنصرين Cj و الذي يمثل سعر البيع للوحدة من هذا المنتج و Zj والذي يمثل قيمة استهلاك هذا المتغير للموارد الحالية و الممثلة بالسعر الثنائي حيث أن الأسعار الثنائية للقيود تمثل القيم الحالية المُستحقة (من وجهة نظر إدارة المصنع) للموارد المتاحة حالياً عند الحل الحالي. و حيث أن الجانب الأيمن ثابت في هذه الحالة فإن المنتج الجديد سيضايق المنتجات الحالية في الموارد الموجودة في القيود النشطة (عمالة الوصلات الكهربائية و عمالة تصنيع الصندوق الخارجي) و ذلك لأنها مستهلكة بالكامل في الحل الحالي، و هذه القيود هي التي لديها قيم لا تساوي الصفر بالنسبة للسعر الثنائي. هنا سنقوم بحساب Zj (استهلاك المنتج الجديد للموارد الحالية المتاحة و الممثلة بالأسعار الثنائية) و ذلك كالتالي [Winston, 2003]:

- الأسعار الثنائية: مصفوفة صفية (1×m).
- معاملات المنتج الجديد في القيود: عبارة عن مصفوفة عمودية (m×1).

Z_5 = الأسعار الثنائية X معاملات المنتج الجديد في القيود

$$Z_5 = \begin{bmatrix} 0 & 11.428572 & 57.142857 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 15 \\ 50 \\ 6 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = 914.2857$$

$$C_5 - Z_5 = 900 - 914.285742 = -14.285742$$

حيث أن قيمة Cj-Zj قيمة سالبة و نحن في حالة Max فإن الحل الأمثل لن يتغير و لن ننـــتج مــن المنـــتج الجديد و لن يكون من المنطق الإنتاج من هذا المنتج إلا إذا كانت سعر بيع المنتج الجديد أكبر من أو يســـاوي 914.2857 ريالاً كما في الشكل 5–15.

$\text{Max } 1200X_1 + 1000X_2 + 900X_3 + 800X_4 + 900X_5$

S.T.

$20 X_1 + 15X_2 + 12X_3 + 12X_4 + 15X_5 <= 1440$
$55 X_1 + 50X_2 + 50X_3 + 40X_4 + 50X_5 <= 2700$
$10 X_1 + 8X_2 + 6X_3 + 6X_4 +6X_5 <= 480$
$6 X_1 + 4X_2 + 3X_3 + 2.5X_4 + 3X_5 <= 350$
$1.5 X_1 + 1.25X_2 + X_3 + X_4 + X_5 <= 75$

LP OPTIMUM FOUND AT STEP 2

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 58285.71

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X_1	42.857143	0.000000
X_2	0.000000	28.571428
X_3	0.000000	14.285714
X_4	8.571428	0.000000
X_5	0.000000	14.285714

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
2)	480.000000	0.000000
3)	0.000000	11.428572
4)	0.000000	57.142857
5)	71.428574	0.000000
6)	2.142857	0.000000

NO. ITERATIONS = 2

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

OBJ COEFFICIENT RANGES

VARIABLE	CURRENT COEF	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABL DECREASE
X_1	1200.000000	16.666679	99.999992
X_2	1000.000000	28.571438	INFINITY
X_3	900.000000	14.285725	INFINITY
X_4	800.000000	72.727272	5.882356
X_5	900.000000	14.285725	INFINITY

RIGHTHAND SIDE RANGES

ROW	CURRENT RHS	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
2	1440.000000	INFINITY	480.000000
3	2700.000000	150.000000	59.999996
4	480.000000	10.909091	75.000000
5	350.000000	INFINITY	71.428574
6	75.000000	INFINITY	2.142857

الشكل 5–15

الحالة الثانية: تحليل الحساسية عند تغير أكثر من عنصر في البرنامج الخطي (قاعدة 100%.):

كان حديثنا سابقاً عن أثر التغير لأحد عناصر البرنامج الخطي على الحل الأمثل مع ثبات باقي العناصر. و الآن سنتحدث عن أثر التغير لأكثر من عنصر في البرنامج الخطي على الحل الأمثل الحالي و التي سنستخدم فيها قاعدة 100%.

قاعدة 100%: تنص هذه القاعدة على أن مجموع نسب التغير لمعاملات دالة الهدف أو مجموع نسب التغير للجانب الأيمن يجب ألا تزيد عن 100% حتى لا يتغير الحل الأمثل لكن قد تتغير قيم المتغيرات و قيمة دالة الهدف [Winston, 2003]. أما إذا كان مجموع نسب التغير أكبر من 100% فإن هذه القاعدة لا تعطي أي دليل على تغير الحل الأمثل بمعنى أن الحل الأمثل قد يتغير و قد لا يتغير.

أولاً: أثر التغير لأكثر من معامل من معاملات دالة الهدف:

عندما يتغير أكثر من معامل من معاملات دالة الهدف فسنكون أمام حالتين:

الحالة الأولى: إذا كانت جميع معاملات المتغيرات في دالة الهدف التي تغيرت لها قيمة تكلفة مخفضة أكبر من الصفر (موجبة). في هذه الحالة نجد أن المتغيرات التي تغيرت هي متغيرات غير أساسية في الحل الأمثل الحالي لأن التكلفة المخفضة لها موجبة و على هذا فسنكون أمام حالتين:

1. أن يكون التغير لهذه المعاملات ضمن المدى المسموح به و بالتالي فإن الحل الأمثل لا يتغير (تبقى القيود النشطة نشطة) و لا تتغير قيم المتغيرات و لا تتغير قيمة دالة الهدف.
2. أن يكون التغير لأحد هذه المعاملات على الأقل خارج المدى المسموح به و بالتالي فإن الحل الأمثل سيتغير و لا بد من إعادة حل المسألة من جديد.

الحالة الثانية: إذا كانت واحدة على الأقل من معاملات المتغيرات في دالة الهدف التي تغيرت لها قيمة تكلفة مخفضة تساوي الصفر. في هذه الحالة نجد أن لدينا على الأقل متغير أساسي قد تغيرت قيمة معامله في دالة الهدف و بالتالي لابد من تطبيق قاعدة 100%. هنا نحتاج لتعريف الرموز التالية:

معاملات المتغيرات في دالة الهدف	الرمز
القيمة الأصلية لمعامل المتغير j	c_j
حجم التغير في المعامل j	Δc_j
الزيادة المسموح بها القصوى للمعامل j	I_j

النقصان المسموح به الأقصى للمعامل j	D_j

نعرّف rj على أنها نسبة التغير في معامل المتغير j. فإذا كانت:

$$\Delta c_j \geq 0, \implies r_j = \Delta c_j / I_j$$

و إذا كانت:

$$\Delta c_j \leq 0, \implies r_j = -\Delta c_j / D_j$$

و إذا كانت:

$$\Delta c_j = 0, \implies r_j = 0$$

حيث أن هذه النسبة تمثل نسبة التغير في معامل المتغير بالنسبة لأقصى مدى مسموح به و الذي يُبقي الحل الأمثل على حاله بدون تغيير. فإذا كان $(\sum r_j \leq 1)$ فإن الحل الأمثل الحالي لن يتغير حيث تظل القيود النشطة نشطة و لا تتغير قيم المتغيرات و لكن تتغير قيمة دالة الهدف. لكن إذا كان مجموع نسب التغير أكبر من 1 $(\sum r_j \geq 1)$ فإن الحل الأمثل قد يتغير و قد لا يتغير حيث أن هذه القاعدة لا تعطينا أي دليل عن أثر التغير على الحل الأمثل.

ثانياً: أثر التغير لقيم الجانب الأيمن لأكثر من قيد:

عندما تتغير قيمة الجانب الأيمن لأكثر من قيد فسنكون كذلك أمام حالتين:

الحالة الأولى: إذا كان التغير في قيمة الجانب الأيمن لقيود غير نشطة فقط و عليه سنكون أمام حالتين:

1. أن يكون التغير لقيم الجانب الأيمن ضمن المدى المسموح به و بالتالي فإن الحل الأمثل لا يتغير (تبقى القيود النشطة نشطة) و لا تتغير قيم المتغيرات و لا تتغير قيمة دالة الهدف.
2. أن يكون التغير لإحدى قيم الجانب الأيمن على الأقل خارج المدى المسموح به و بالتالي فإن الحل الأمثل الحالي سيتغير و لا بد من إعادة حل المسألة من جديد.

الحالة الثانية: إذا كان واحدٌ على الأقل من القيود التي تغيرت قيمة جانبها الأيمن قيداً نشطاً. في هذه الحالة لابد من تطبيق قاعدة 100% و سنحتاج هنا لتعريف الرموز التالية:

الجانب الأيمن	الرمز
القيمة الحالية للجانب الأيمن في القيد i	b_i
حجم التغير في قيمة الجانب الأيمن للقيد i	Δb_i
الزيادة المسموح بها القصوى للجانب الأيمن في القيد i	I_i
النقصان المسموح به الأقصى للجانب الأيمن في القيد i	D_i

نعرّف r_i على أنها نسبة التغير في قيم الجانب الأيمن i. فإذا كانت:

$$\Delta b_i \geq 0, \quad ===\rightarrow r_i = \Delta b_i / I_i$$

و إذا كانت:

$$\Delta b_i \leq 0, \quad ===\rightarrow r_i = -\Delta b_i / D_i$$

و إذا كانت:

$$\Delta b_i = 0, \quad ===\rightarrow r_i = 0$$

حيث أن هذه النسبة تمثل نسبة التغير في قيمة الجانب الأيمن بالنسبة لأقصى مدى مسموح به و الذي يُبقي الحل الأمثل على حاله بدون تغيير. فإذا كان $(\sum r_i \leq 1)$ فإن الحل الأمثل لن يتغير و لكن تتغير قيم المتغيرات و قيمة دالة الهدف. لكن إذا كان مجموع نسب التغير أكبر من 1 $(\sum r_i \geq 1)$ فإن الحل الأمثل (القيود النشطة) قد يتغير و قد لا يتغير حيث أن هذه القاعدة لا تعطينا أي دليل عن أثر التغير على الحل الأمثل لكن قيم المتغيرات و قيمة دالة الهدف ستتغيران في الغالب

مثال توضيحي:

مسألة 5-6: في المسألة السابقة 5-5 ماذا يحدث للحل الأمثل إذا:

1. زاد معامل X_2 في دالة الهدف بمقدار 20 ريالاً و زاد معامل X_3 في دالة الهدف بمقدار 10 ريالات.

بما أن كلا المتغيرين متغيران غير أساسيين و بما أن الزيادة في قيمة معاملهما كان أقل من الزيادة المسموح بها فإن الحل الأمثل الحالي:

1. لا يتغير أي تبقى القيود النشطة نشطة.
2. قيم المتغيرات لا تتغير.
3. قيمة دالة الهدف لا تتغير.

2. زاد معامل X_2 في دالة الهدف بمقدار 30 ريالاً و زاد معامل X_3 في دالة الهدف بمقدار 10 ريالات.

بما أن كلا المتغيرين متغيران غير أساسيين و بما أن الزيادة في قيمة معامل X_2 كانت أكبر من الزيادة المسموح بها فإن الحل الأمثل الحالي سيتغير و لا بد من إعادة حل المسألة.

3. زاد معامل X_1 في دالة الهدف بمقدار 8 ريالات و زاد معامل X_3 في دالة الهدف بمقدار 10 ريالات.

حيث أن أحد المتغيرات متغير أساسي (X_1) فنحتاج هنا لتطبيق قاعدة 100%.

$\Delta c_1 = 8$, $I_1 = 16.6666$, $r_1 = 0.48$
$\Delta c_3 = 10$, $I_3 = 14.2857$, $r_3 = 0.70$
$\sum r_j = 1.18 > 1$

بما أن $\sum r_j > 1$ فإن الحل الأمثل الحالي قد يتغير و قد لا يتغير لكن قيمة دالة الهدف ستتغير.

4. زاد معامل X_1 في دالة الهدف بمقدار 5 ريالات و نقص معامل X_4 في دالة الهدف بمقدار ريالين.

بما أن كلا المتغيرين متغيران أساسيان فنحتاج هنا لتطبيق قاعدة 100%.

$\Delta c_1 = 5 \;, I_1 = 16.6666, r_1 = 0.30$
$\Delta c_4 = 10, D_4 = 5.8823, r_3 = 0.34$
$\sum r_j = 0.64 < 1$

بما أن $\sum r_j < 1$ فإن الحل الأمثل الحالي:

1. لا يتغير أي تبقى القيود النشطة نشطة.
2. قيم المتغيرات لا تتغير.
3. قيمة دالة الهدف سوف تتغير و تصبح:

New z-value = 1205 (42.857143) + 798 (8.571428) = 58482.857

5. زاد معامل X_1 في دالة الهدف بمقدار 15 ريالاً و زاد معامل X_4 في دالة الهدف بمقدار 10 ريالات.

بما أن كلا المتغيرين متغيران أساسيان فنحتاج هنا لتطبيق قاعدة 100%.

$\Delta c_1 = 15, I_1 = 16.6666, r_1 = 0.90$
$\Delta c_4 = 10, I_4 = 72.7272, r_3 = 0.1375$
$\sum r_j = 1.0375 > 1$

بما أن $\sum r_j > 1$ فإن الحل الأمثل الحالي قد يتغير و قد لا يتغير لكن قيمة دالة الهدف ستتغير.

6. نقص الجانب الأيمن للقيد الأول بمقدار 100 دقيقة و زاد الجانب الأيمن للقيد الرابع بمقدار 20 متراً.

بما أن القيد الأول و القيد الرابع قيدان غير نشطين و الزيادة في كليهما ضمن المدى المسموح به، فإن الحل الأمثل الحالي:

1. لا يتغير أي تبقى القيود النشطة نشطة.
2. قيم المتغيرات لا تتغير.
3. قيمة دالة الهدف لا تتغير.

7. زاد الجانب الأيمن للقيد الرابع بمقدار 100 متر و للقيد الخامس بمقدار 20 كيلو و نقص الجانب الأيمن للقيد الأول بمقدار 500 دقيقة.

بما أن القيد الأول و الرابع و الخامس قيودٌ غير نشطة و التغير كان ضمن المدى المسموح به إلا للقيد الأول فالنقصان خارج المدى المسموح به، فإن الحل الأمثل الحالي سيتغير و بالتالي لا بد من إعادة حل المسألة لمعرفة أثر التغير على الحل الأمثل الحالي.

8. زاد الجانب الأيمن للقيد الثاني بمقدار 10 دقائق و للقيد الثالث بمقدار 5 دقائق.

بما أن القيد الثاني و القيد الثالث قيدان نشطان و الزيادة (تغير موجب) في كليهما ضمن المدى المسموح به فلا بد هنا من تطبيق قاعدة 100%.

القيد	b_i	Δb_i	I_i	r_i
الثاني	2700	10	150	10/150

الثالث	480	5	10.909	5/10.909
المجموع				0.525

حيث أن $\sum r_i = 0.525$ و هي أصغر من 1 فإن الحل الأمثل الحالي:

1. لا يتغير أي تبقى القيود النشطة نشطة.
2. قيم المتغيرات سوف تتغير و بحل المعادلات جبرياً تكون قيمة $X_1 = 44.857$ و $X_4 = 6.0714$ أما باقي المتغيرات فإن قيمها تبقى على حالها السابقة و التي تساوي صفراً و ذلك لأن التغير لم يؤثر على قيمة التكلفة المخفضة لهم.
3. قيمة دالة الهدف سوف تتغير و تصبح $Z = 58685.71$.

9. زاد الجانب الأيمن للقيد الثاني بمقدار 10 دقائق و للقيد الرابع بمقدار 5 أمتار.

بما أن القيد الثاني قيدٌ نشطٌ و القيد الرابع قيدٌ غير نشط و الزيادة (تغير موجب) في كليهما ضمن المدى المسموح به فلا بد هنا من تطبيق قاعدة 100%.

القيد	b_i	Δb_i	I_i	r_i
الثاني	2700	10	150	10/150
الرابع	350	5	∞	0
المجموع				0.0667

حيث أن $\sum r_i = 0.0667$ و هي أصغر من 1 فإن الحل الأمثل الحالي:

1. لا يتغير أي تبقى القيود النشطة نشطة.
2. قيم المتغيرات سوف تتغير و بحل المعادلات جبرياً للقيود النشطة فقط تكون قيم $X_1 = 42$ و قيمة X_4 = 10 أما باقي المتغيرات فإن قيمها تبقى على حالها السابقة و التي تساوي صفراً و ذلك لأن التغير لم يؤثر على قيمة التكلفة المخفضة لهم.
3. قيمة دالة الهدف سوف تتغير و تصبح $Z = 58400$.

10. زاد الجانب الأيمن للقيد الثاني بمقدار 20 دقيقة و للقيد الثالث بمقدار 10 دقائق.

بما أن القيد الثاني و القيد الثالث قيدان نشطان و الزيادة (تغير موجب) في كليهما ضمن المدى المسموح به فلا بد هنا من تطبيق قاعدة 100%.

القيد	b_i	Δb_i	I_i	r_i
الثاني	2700	20	150	20/150
الثالث	480	10	10.909	10/10.909
المجموع				1.05

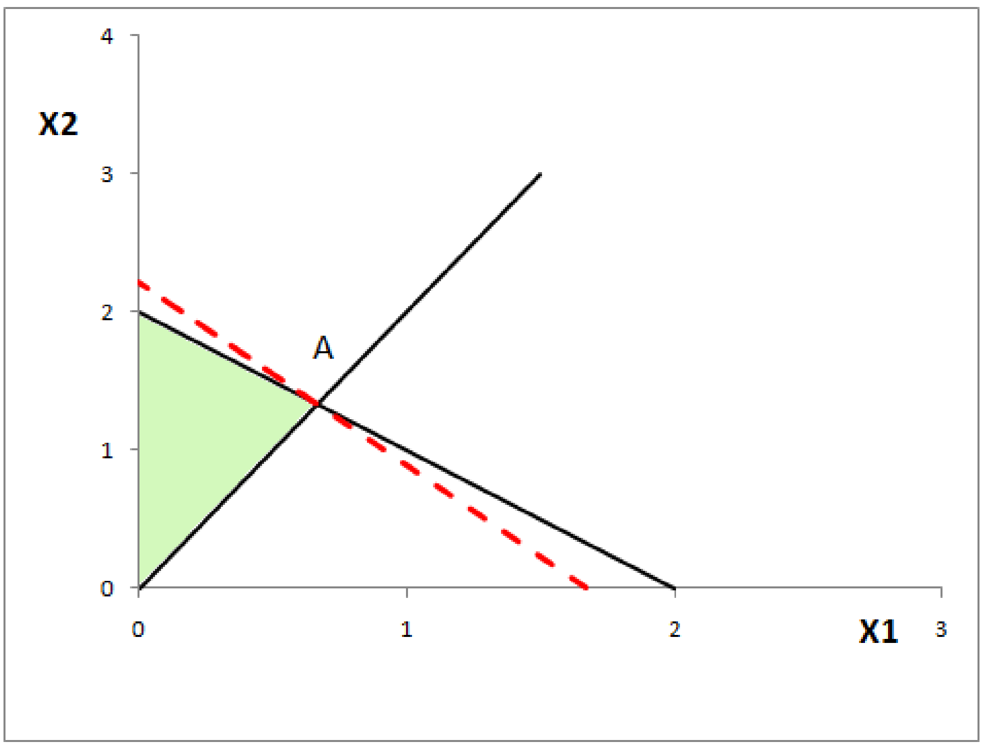
حيث أن $\sum r_i = 1.05$ و هي أكبر من 1 فإن الحل الأمثل الحالي قد يتغير و قد لا يتغير حيث أن هذه القاعدة لا تعطينا أي معلومة عن أثر هذا التغير و لكن قيم المتغيرات و قيمة دالة الهدف ستتغيران في الغالب و هنا لا بد من إعادة حل المسألة.

ملحق مواضيع إضافية في تحليل الحساسية:

1. إيجاد الحدود الدنيا و القصوى لمعاملات المتغيرات في دالة الهدف عندما تكون إشارة المعاملات مختلفة:

عندما تكون إشارة المعاملات مختلفة فإننا سنواجه مشكلة في إيجاد الحد الدنى أو الحد الأعلى للتغير في معاملات المتغيرات في دالة الهدف. سنستخدم المسألة (5−6) لتوضيح ذلك:

Max $z = 20X_1 + 15X_2$
Subject to
$3X_1 + 3X_2 \leq 6$
$6X_1 - 3X_2 \leq 0$
$X_1, X_2 \geq 0$



شكل 5−16

نلاحظ أن قيم الحل الأمثل لهذه المسألة هي ($Z=100/3$, $X_1=2/3$, $X_2=4/3$) و ذلك عند النقطة A و التي تمثل تقاطع القيدين في الشكل 5−16.

لتحديد المدى المسموح به فلا بد أن نستخدم العلاقة بين معاملات المتغيرات في دالة الهدف و معاملات المتغيرات في القيود النشطة (جميع القيود في المسألة 5−6) و الموضحة في العلاقة التالية:

$$\frac{\text{معامل } X_1 \text{ في دالة الهدف}}{\text{معامل } X_2 \text{ في دالة الهدف}} = \frac{\text{معامل } X_1 \text{ في القيد النشط i}}{\text{معامل } X_2 \text{ في القيد النشط i}}$$

نلاحظ كذلك أن إشارة معاملات المتغيرات في القيد الثاني مختلفة و لذلك لابد من الحذر هنا عند إيجاد الحدو العليا و الدنيا. فلو أردنا معرفة الحد الأدنى لمعامل X_1 الذي يُبقي الحل الأمثل الحالي كما هو أي تبقى القيود النشطة كما هي وقيم المتغيرات كما هي مع تغير قيمة دالة الهدف (Objective Value) فيجب أن نتعامل مع القيد الأول لأنه كلما انخفض معامل X_1 في دالة الهدف فإن ميل دالة الهدف يكون أقرب إلى مساواة ميل القيد الأول و بالتالي فإن:

$$\frac{\text{معامل } X_1 \text{ في دالة الهدف}}{\text{معامل } X_2 \text{ في دالة الهدف}} = \frac{\text{معامل } X_1 \text{ في القيد النشط الأول}}{\text{معامل } X_2 \text{ في القيد النشط الأول}}$$

و بعد التعويض فإن،

$$\frac{\text{الحد الأدنى لمعامل } X_1 \text{ في دالة الهدف}}{15} = \frac{3}{3}$$

إذاً، الحد الأدنى لمعامل X_1 في دالة الهدف = 15

و بنفس الطريقة يمكن أن تكون العلاقة بين معاملات دالة الهدف و معاملات القيد النشط الثاني، لكن نلاحظ أن ميل القيد الثاني موجب أي كلما زادت X_1 ستزداد X_2 و بالتالي سنوجد حداً أدنى آخر و ذلك لاختلاف إشارة معاملات المتغيرات في القيد الثاني.

$$\frac{\text{معامل } X_1 \text{ في دالة الهدف}}{\text{معامل } X_2 \text{ في دالة الهدف}} = \frac{\text{معامل } X_1 \text{ في القيد النشط الثاني}}{\text{معامل } X_2 \text{ في القيد النشط الثاني}}$$

و بعد التعويض فإن،

$$\frac{\text{الحد الأدنى لمعامل } X_1 \text{ في دالة الهدف}}{15} = \frac{6}{-3}$$

إذاً، الحد الأدنى لمعامل X_1 في دالة الهدف = 30-

و حيث أن 15 أقرب من 30− لقيمة معامل X_1 الحالية في دالة الهدف فإن الحد الأدنى يساوي 15. أما الحد الأعلى فيساوي مالا نهاية لعدم و جود قيمة أكبر من قيمة المعامل الحالي عند تعاملنا مع القيود النشطة.

أما بالنسبة لمعامل X_2 في دالة الهدف فإن الحد الأعلى:

$$\frac{20}{\text{الحد الأعلى لمعامل } X_2 \text{ في دالة الهدف}} = \frac{3}{3}$$

إذاً، الحد الأعلى لمعامل X_2 في دالة الهدف = 20

و الحد الأدنى لمعامل X_2 في دالة الهدف يساوي:

$$\frac{20}{\text{الحد الأدنى لمعامل } X_2 \text{ في دالة الهدف}} = \frac{6}{-3}$$

إذاً، الحد الأدنى لمعامل X_2 في دالة الهدف = -10

النقصان المسموح به Allowable Decrease	الزيادة المسموح بها Allowable Increase	الحد الأدنى Lower Bound	الحد الأقصى Upper Bound	القيمة الحالية Current Value	المتغير Variable
5	∞	15	∞	20	X_1
25	5	-10	20	15	X_2